

Prestasjonsprofiler og undervisning i ulike land

Arne Hole

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Marie Vaksvik Draagen

Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole

Det er vel kjent fra tidligere forskning at man i internasjonale matematikkstudier som TIMSS, TIMSS Advanced og PISA finner ulike *prestasjonsprofiler* blant deltakende land og utdanningssystemer (Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Onstad, 2013b; Grønmo et al., 2012). Man kan snakke om en typisk *nordisk* profil, en *engelskspråklig* og en *tyskspråklig* profil (eventuelt en mer generell *vestlig* profil), en *østeuropeisk* profil og en *østasiatisk* profil. Disse profilene har å gjøre med de ulike landenes prestasjoner innenfor ulike emneområder som algebra, geometri og så videre. Man måler hvor godt det enkelte land gjør det innenfor et gitt emneområde, for eksempel geometri, sammenliknet med landets prestasjoner innenfor andre emneområder. For hvert land er det altså *differansene* i skår mellom ulike emneområder man studerer. Når man så sammenlikner ulike land og definerer prestasjonsprofiler, er det forskjeller i disse differansene, altså *differanser* i differansene, man ser etter. For eksempel har man i flere tidligere studier funnet at for land som har en typisk *nordisk* profil, er differansen mellom prestasjoner innen *geometri* og prestasjoner innen *algebra* langt større, altså mer positiv, enn tilfellet er for land med en *østasiatisk* profil.

Vi skal i dette kapitlet blant annet se på hvordan prestasjoner i TIMSS matematikk trinn 8 og TIMSS Advanced varierer mellom ulike land når vi benytter kategoriene definert av LC-rammeverket fra kapittel 2. En fordel ved å bruke dette rammeverket er at det ikke refererer til matematiske emneområder, men i stedet til ulike typer matematisk teori. Dette fokusskiftet gjør at analysen løftes opp fra en diskusjon om prioritering av ulike matematiske *emner* til en beskrivelse av hvordan ulike land arbeider med mer generelle aspekter ved matematikk i skolen, for eksempel formelt matematisk språk.

5.1 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS 2011 matematikk

I (Hole et al., 2015) ble det gjort en IRT-analyse (Item Response Theory av typen random item Rasch, se De Boeck, 2008) av sammenhengen mellom LC-kategoriseringen og elevprestasjoner for de norske dataene i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn. Analysen viste at omtrent 19 % av den totale variasjonen i norske prestasjoner på oppgavene kunne tilskrives individuelle forskjeller mellom elevene, og at omtrent 32 % kunne tilskrives variasjon i oppgavenes vanskelighetsgrad. Videre kunne de to dikotomiene F/NF og T/NT til sammen forklare omtrent 23 % av variasjonen i vanskelighetsgrad mellom oppgavene. Kategorien T tilsvarte en ganske liten økning i vanskelighetsgrad ($\beta = 0,49$ (0,22), $p = 0,028$) sammenliknet med mengden av oppgaver kategorisert som både NF og NT, mens kategorien F tilsvarte en stor økning i vanskelighetsgrad ($\beta = 1,48$ (0,22), $p < 0,001$) sammenliknet med NF/NT-mengden. En av konklusjonene vi kan trekke fra dette, er at for de norske dataene leder relevansen av matematiske teoremer *ikke* til noen vesentlig økning i oppgavens vanskelighetsgrad. Dette indikerer at oppgaver som er lite «teoritunge», og som da typisk havner i kategorien NT, gjennomgående ikke er enklere å løse for norske elever enn oppgaver der kjennskap til matematiske resultater (teoremer) er relevant. Videre kan vi konkludere med at involvering av formler i sterk grad tenderte til å gjøre oppgavene vanskeligere for norske elever i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn.

IRT-analysen av de norske dataene fra TIMSS 2011 antyder et mønster som det er interessant å se om man finner også i andre lands data. Når man skal gjøre slike analyser, er det formålstjenlig å se på grupper av land som tidligere har vist seg å ha fellestrekk i sine prestasjonsprofiler. Vi skal her se på følgende tre grupper av land:

- Østasiatisk gruppe: Japan, Hong Kong, Singapore
- Østeuropeisk gruppe: Ungarn, Kazakhstan, Russland, Slovenia, Ukraina
- Vestlig gruppe: England, Finland, Norge, Sverige, Italia, USA

Som nevnt tidligere representerer hver av disse gruppene land som i tidligere forskning har vist fellestrekk i sine prestasjonsprofiler (Grønmo et al., 2004a; Grønmo & Onstad, 2013b). Grunnen til at antall land i de tre gruppene er ulike, er at det er av spesiell interesse for oss fra et vestlig og europeisk perspektiv å se på undergrupper av de to siste gruppene. For eksempel er det av interesse å

sammenlikne nordiske land med den vestlige gruppen. For hver gruppe av land slår vi i vår analyse sammen utvalgene av testede elever direkte, som om de alle var fra samme land. Mens dette naturligvis ikke gir oss et representativt utvalg for regionen definert av landene, betrakter vi det likevel som en bedre løsning enn å beregne resultater for hvert land separat og så ta gjennomsnittet i gruppen av land. Et representativt utvalg for regionene som helhet er uansett ikke tilgjengelig. Videre har metoden med direkte sammenslåing den fordel at de teoretiske ulempene med den er enkle å beskrive og forstå. Det er dessuten mulig å argumentere for at de ikke er vesentlige i vår sammenheng.

Når vi går over til å sammenlikne land og regioner av land med hverandre, blir det interessant å se på hvordan de gjennomsnittlige *differansene* i prestasjoner mellom kategoriene F/NF og T/NT varierer mellom landene/regionene. Vi studerer altså differanser i differanser. Vi velger da å gå over fra å bruke plassering på IRT-skalaen til å bruke *p-verdi* (prosent korrekt) som karakterisering av oppgavens vanskelighetsgrad. I TIMSS finnes det oppgaver som gir 1 poeng og oppgaver som gir 2 poeng. For oppgaver som gir 1 poeng, angir *p*-verdien ganske enkelt prosentandelen som fikk til oppgaven blant de som fikk den på testen. For 2-poengsoppgaver beregnes *p*-verdien ved å addere antall studenter som fikk 1 poeng delt på 2 med antallet som fikk 2 poeng, og deretter dele på totalt antall studenter som ble gitt oppgaven i testen (Martin, Mullis & Hooper, 2016).

En ulempe med å benytte *p*-verdier er at forskjeller i gjennomsnittlig vanskelighetsgrad og liknende i testblokken der oppgaven var plassert, ikke blir tatt hensyn til. I vårt tilfelle er det imidlertid grunn til å anta at disse påvirkningene er uavhengige av kategoriene vi studerer, og at de dermed spiller liten rolle. Fordelen med å bruke *p*-verdiene direkte er at resultatene får en enklere tolkning; en tolkning som forteller mer direkte om forskjellene mellom prestasjonene i ulike land.

Tabell 5.1 viser gjennomsnittlige *p*-verdier for kategoriene F og NF i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn for ulike grupper av land. Fra de to første kolonnene ser man hvor store ulikheter i gjennomsnittlige *p*-verdier det faktisk er mellom de ulike gruppene av land. At disse forskjellene er så betydelige, blir mindre synlig når landenes prestasjonsdata kodes på den normaliserte TIMSS-skalaen med senterpunkt 500 og standardavvik 100 (basert på 1995-undersøkelsen). Dette illustrerer en fordel med å benytte *p*-verdier. Vi ser at for oppgaver kategorisert som F, altså som oppgaver der formler er involvert, er gjennom-

snittlig p -verdi 65 % i den østasiatiske gruppen. I den vestlige gruppen er den gjennomsnittlige p -verdien for denne kategorien oppgaver mindre enn det halve, og i Norge er den kun 22,5 %.

Tabell 5.1 Gjennomsnittlige p -verdier for oppgavekategoriene NF og F i ulike grupper av land, TIMSS 2011 matematikk 8. trinn.

	Gjennomsnittlig p -verdi kategori NF	Gjennomsnittlig p -verdi kategori F	Differanse NF-F
Østasiatisk gruppe	71,0 %	65,0 %	6,0 %
Østeuropeisk gruppe	52,9 %	49,4 %	3,5 %
Vestlig gruppe	39,4 %	30,2 %	9,2 %
Norge og Sverige	39,1 %	24,7 %	14,5 %
Norge	39,1 %	22,5 %	16,6 %

Kolonnen lengst til høyre i tabell 5.1 viser differansene i gjennomsnittlige p -verdier for oppgavekategoriene NF og F. Her ser vi et bilde som samsvarer godt med tidligere forskning på prestasjonsprofiler i ulike regioner (Grønmo et al., 2004a; Olsen & Grønmo, 2006). For alle gruppene av land er tendensen at oppgaver som ikke involverer formler (NF) faller lettere enn oppgaver der formler spiller en rolle (F). Men differansene varierer mellom gruppene av land. Vi ser at preferanseforskjellen i retning av NF er svakest i den østeuropeiske gruppen. Dette indikerer at landene i denne gruppen i sine tradisjoner for skolematematikk relativt sett legger mer vekt på formelt matematisk språk enn hva tilfellet er i andre regioner. Den nest minste verdien for NF-F finner vi i den østasiatiske gruppen. Denne har imidlertid de suverent høyeste verdiene for både F og NF blant alle gruppene, noe som naturligvis reflekterer disse landenes høye totalprestasjoner på TIMSS-skalaen. For både den østeuropeiske og den østasiatiske gruppen av land kan man imidlertid si at det er en rimelig balanse mellom NF og F, altså mellom prestasjoner på oppgaver som involverer formler og på oppgaver som ikke gjør det. Når vi ser på vestlige land, tegner tabell 5.1 et annet bilde. Her ser vi en betydelig forskjell mellom gjennomsnittlige prestasjoner på oppgaver som involverer formler og oppgaver som ikke gjør det. Forskjellen blir enda større hvis vi begrenser oss til Sverige og Norge, og den er faktisk også mer ekstrem i Norge enn i Sverige. Dette

indikerer at på 8. trinn er Norges nedprioritering av formell matematikk ekstrem sammenliknet med andre land.

Ulikhetene i differanser NF–F som man ser i tabell 5.1, reflekterer ulike tradisjoner og kulturer for skolematematikk i ulike deler av verden. Selv om mønsteret man ser kan sies å samsvare med tidligere forskning, er det noen viktige forskjeller. Mens mye tidligere forskning på prestasjonsprofiler av denne typen har dreid seg om prestasjoner på ulike *emneområder* i matematikk, går kategoriene vi opererer med her (F og NF) på tvers av matematiske tema. Variasjon i prestasjonsprofiler over ulike matematiske *emneområder* kan lett tolkes som bare et uttrykk for at ulike land og regioner av land i ulik grad *prioriterer forskjellige matematiske emner*, som algebra, geometri og så videre.

Med kategoriene F og NF ser vi at forskjellene i tradisjoner ligger på et dypere nivå: De er ikke knyttet til prioritering av konkrete emneområder. For eksempel finnes det også TIMSS-oppgaver innen emneområdet geometri som inneholder formler, og som dermed faller i kategorien F. Det er altså ikke kun oppgaver innen algebra som faller i denne kategorien, selv om begrepet «formler» har med algebra å gjøre. Forskjellene vi ser i tabell 5.1 indikerer forskjeller i prioritering av formelt matematisk språk, det er ikke prioriteringer av ulike matematiske emner vi ser på her. En liknende analyse kan gjennomføres for differanser i gjennomsnittsverdier NT–T, men vi skal ikke gå inn på dette.

Ulikheter i prioritering mellom F og NF på dette skolenivået gir oss også informasjon om den langsiktige *progresjonen* i formell matematisk tenkning gjennom skoleløpet i ulike land. Senere i dette kapitlet skal vi se på en sammenlikning mellom Norge og et utvalgt land fra den østasiatiske gruppen, nemlig Singapore, når det gjelder noen eksempler på progresjon knyttet til konkrete matematiske temaer. I den sammenlikningen ser vi på alderstrinn som går fra omtrent siste del av ungdomstrinnet i Norge fram til omtrent starten av Matematikk R1, som er et matematikkurs lagt til 12. trinn. Vi ser altså der på skoleårene som følger like etter nivået der TIMSS 8. trinn måler prestasjoner, og vi konsentrerer oss om den elevgruppen som fortsetter med Matematikk 1T på 11. trinn. Matematikk R1 ligger igjen til grunn for Matematikk R2, som definerer populasjonen Norge deltar med i TIMSS Advanced matematikk.

5.2 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS Advanced 2015 matematikk og fysikk

I TIMSS Advanced er det såpass få deltakerland at det gir liten mening å se på grupper av land, slik vi gjorde for TIMSS 8. trinn i forrige delkapittel. En direkte sammenlikning med resultatene fra forrige delkapittel umuliggjøres også av at ingen land fra Øst-Asia deltar i TIMSS Advanced. I tilfellet TIMSS Advanced er det derfor mer hensiktsmessig å sammenlikne landene enkeltvis.

Vi starter med fysikk. Som nevnt i kapittel 2 kan LC-rammeverket anvendes også på tester og eksamener i andre fag enn matematikk. Rammeverket måler avhengigheten av matematisk teori (testens «matematikkinnhold») uavhengig av om testen kalles en matematikktest eller ei. Fysikk er naturligvis et godt eksempel i denne sammenhengen, og vi skal se at resultatene vi finner for fysikk, også kaster lys over matematikkfaget, som er vårt anliggende i denne boken. Tabell 5.2 angir differanser i gjennomsnittlige p -verdier for oppgavekategoriene NF og F i fysikk for utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015. En nærmere beskrivelse av selve kategoriseringsarbeidet er gitt i kapittel 2.

Tabell 5.2 Gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien NF minus gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien F i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 fysikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NF–F
Norge	7,67 %
Sverige	3,82 %
USA	5,86 %
Russland	–0,21 %
Frankrike	14,04 %
Slovenia	–4,70 %
Portugal	3,18 %

Tabell 5.3 angir tilsvarende differanser i gjennomsnittlige p -verdier for oppgavekategoriene NT og T i TIMSS Advanced fysikk.

Tabell 5.3 Gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien NT minus gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien T i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 fysikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NT-T
Norge	13,76 %
Sverige	11,42 %
USA	10,63 %
Russland	5,40 %
Frankrike	19,88 %
Slovenia	5,50 %
Portugal	8,98 %

I tilfellet fysikk har de fire oppgavegruppene F, NF, T og NT alle minst 15 oppgaver. Videre er standardfeilen til p -verdien for alle enkeltoppgaver høyst 3,9 % i alle landene vi ser på, jamfør databasen på www.timssandpirls.bc.edu. Derfor er standardfeilen for gjennomsnittlig p -verdi mindre enn $3,9/\sqrt{15}$ i alle de fire gruppene. Standardfeilen for differansene i tabellene 5.2 og 5.3 finnes så ved å multiplisere med $\sqrt{2}$, noe som gir oss omtrent 1,42. Multiplikasjon med 1,96 gir at 95 % signifikansnivå tilsvarer et avvik på litt under 2,8 %. Så differansene i tabellene 5.2 og 5.3 er signifikante hvis de er minst 2,8 %. Med andre ord er de aller fleste av dem signifikante.

Fra tabell 5.2 ser vi at alle land unntatt Russland og Slovenia har en signifikant, positiv differanse mellom de gjennomsnittlige p -verdiene for NF og F, noe som indikerer at elever i disse landene gjennomsnittlig finner oppgaver som involverer formler vanskeligere enn oppgaver som ikke gjør det. Slovenia har en signifikant negativ differanse i tabell 5.2, noe som indikerer at slovenske elever tenderer i retning av å finne oppgaver der formler er involvert *enklere* enn andre oppgaver. Vi ser at alle landene i tabell 5.3 har en positiv, signifikant differanse mellom de gjennomsnittlige p -verdiene for NT og T, noe som betyr at elevene generelt tenderer mot å synes at fysikkoppgaver der kjennskap til matematiske teoremer er relevant, er vanskeligere enn andre fysikkoppgaver. Effekten er mest framtrødende i Frankrike, etterfulgt av Norge. Når det gjelder Frankrike, bør det i denne sammenhengen bemerkes at de har en langt høyere dekningsgrad både i TIMSS Advanced fysikk og TIMSS Advanced matematikk enn Norge har, vel 20 % i begge fag for Frankrike sammenliknet med omtrent 11 % i matematikk og 6 % i fysikk for Norge (Grønmo et al., 2016).

Differansen NT–T er mer beskjeden i Russland og Slovenia, parallelt med resultatene i tabell 5.2.

Generelt vil *differansene mellom differansene* for to land i tabell 5.2 og 5.3 være signifikante hvis de overstiger 2,8 % multiplisert med $\sqrt{2}$. Så hvis slike differanser er over 4 %, er de signifikante. For eksempel, siden den norske verdien minus den russiske verdien i tabell 5.3 er rundt 8 %, indikerer tabellen at de norske elevene er signifikant mer «negative» til relevans av matematiske teoremer i fysikkoppgaver enn tilfellet er med russiske elever. Relasjonen mellom fysikkprestasjoner i TIMSS Advanced og mål for matematikkompetanse har tidligere blitt adressert i (Lie, Angell & Rohatgi, 2012) og (Nilsen, Angell & Grønmo, 2013). Man har blant annet funnet indikasjoner på at tilbakegang i fysikk fra TIMSS Advanced 1995/98 til 2008 kan ha sammenheng med svakere kompetanse innen algebra.

Vi går nå over til å se på TIMSS Advanced 2015 matematikk. Som vanlig beregner vi gjennomsnittlig p -verdi for mengden av oppgaver klassifisert som F og trekker fra gjennomsnittlig p -verdi for mengden av oppgaver klassifisert som NF. Vi får da resultatene i tabell 5.4.

Tabell 5.4 Gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien NF minus gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien F i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 matematikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NF–F
Norge	12,54 %
Sverige	9,79 %
USA	10,53 %
Russland	4,46 %
Frankrike	12,13 %
Slovenia	8,98 %
Portugal	10,96 %

Hvis vi beregner gjennomsnittlig p -verdi for matematikkoppgaver klassifisert som NT og trekker fra gjennomsnittlig p -verdi for matematikkoppgaver klassifisert som T, får vi resultatene i tabell 5.5.

Tabell 5.5 Gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien NT minus gjennomsnittlig p -verdi for oppgavekategorien T i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 matematikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NT-T
Norge	-2,14 %
Sverige	-1,83 %
USA	5,82 %
Russland	3,46 %
Frankrike	9,74 %
Slovenia	8,57 %
Portugal	10,11 %

For klassifikasjonen av matematikkoppgavene i TIMSS Advanced 2015 inneholder kategoriene T og NT begge minst 15 oppgaver. Kategoriene F og NF inneholder minst 25 oppgaver. Ingen av p -verdiene for enkeltoppgavene i matematikk har en standardfeil som overstiger 3,9 % i noen av landene vi ser på (se databasen på www.timssandpirls.bc.edu). En enkel beregning av samme type som tidligere gir at differansene i tabell 5.4 er signifikante hvis de er minst 2,2 %, mens differansene i tabell 5.5 er signifikante hvis de er minst 3 %. Med andre ord er nesten alle differansene i tabellene 5.4 og 5.5 signifikante. Differanser i differansene mellom land vil være signifikante hvis de er over 3,1 % i tabell 5.4 og 4,25 % i tabell 5.5. For eksempel kan vi se fra tabell 5.4 at differansen NF-F er signifikant større i Norge enn i Russland og Slovenia.

I tabell 5.4 ser vi et mønster som har klare likhetstrekk med det tilsvarende resultatet for fysikk i tabell 5.2. De østeuropeiske landene, og særlig Russland, har relativt små differanser i gjennomsnittlig p -verdi mellom oppgaver som avhenger av formler og oppgaver som ikke gjør det. Landet med størst verdi for differansen, er Norge.

Resultatene for differansen NT-T i matematikk (tabell 5.5) bryter mønsteret. Her viser de nordiske landene minst differanse NT-T, faktisk har både Norge og Sverige litt høyere gjennomsnittlig p -verdi for kategorien T enn for kategorien NT. Dette resultatet er interessant, fordi det ser ut til å være i strid med den generelle regelen om at elever i vestlige land, og spesielt i nordiske land, ikke gjør det bra på oppgaver som krever kjennskap til formell matematikk.

Imidlertid er det flere mulige tolkninger av dette funnet. For eksempel kan resultatet være et uttrykk for at mens norske og svenske elever ikke presterer

godt på oppgaver som krever forståelse for «grunnleggende», men likevel formell matematikk, for eksempel algebra, er emneplanene for de aktuelle kursene (Matematikk R2 i Norge) avanserte og omfattende når det gjelder hvilke emner som dekkes. Dette gjør at elevene i Norge og Sverige har kjennskap til mange avanserte teoremer, og at de dermed skårer bedre på en del tungt «teorem-avhengige» oppgaver enn elever fra land med snevrere emneplaner vil gjøre. De kombinerte resultatene fra tabellene 5.4 og 5.5 kan da tolkes som å indikere at mens emneplanene i Norge og Sverige er ganske *brede*, er de lite *dype* i den forstand at formelt matematisk språk og «tekniske» oppgaver ikke vektlegges særlig. Det må imidlertid understrekes at dette kun er et eksempel på en *mulig* tolkning av de nordiske resultatene i tabell 5.5. Mer forskning trengs før man kan si noe sikkert om bakgrunnen.

Det er også av interesse å se på utviklingen i prestasjoner fra forrige gjennomføring av TIMSS Advanced (2008) fram til gjennomføringen i 2015 i lys av LC-klassifiseringen. Vi skal her begrense oss til å se på Norge, og vi skal ta for oss trendoppgavene fra 2008. Dette er altså de oppgavene som var felles for TIMSS Advanced 2008 og 2015. Endringen i differansen NF–F for gjennomsnittlige p -verdier i Norge fra 2008 til 2015 er 5,7 prosentpoeng på mengden av trendoppgaver i matematikk. Dette indikerer at elevenes preferanse for oppgaver som ikke avhenger av formler, er blitt styrket fra 2008 til 2015. Endringen i NT–T for gjennomsnittlige p -verdier i Norge er derimot –1,6 prosentpoeng, noe som indikerer at norske elever har blitt mer positive til oppgaver som er avhengige av matematiske teoremer fra 2008 til 2015. Dette siste kan indikere at den norske læreplanen er blitt bredere, jamfør ovenfor. Vi kan ikke si noe om signifikans her, men bildet er likevel interessant. Selv om Norge generelt sett går noe fram i matematikk fra TIMSS Advanced 2008 til TIMSS Advanced 2015, øker altså forskjellen NF–F med 5,7 prosentpoeng. Framgangen for Norge fra 2008 til 2015 er med andre ord primært knyttet til kategorien NF, det vil si oppgaver som ikke involverer formler. Siden det typisk er grunnleggende algebra og liknende som er mest relevant for fysikkoppgaver, er det interessant å se den norske tilbakegangen i TIMSS Advanced fysikk fra 2008 til 2015 (Grønmo et al., 2016) i lys av dette. I fysikk øker både differansen NF–F og NT–T i gjennomsnittlige p -verdier for trendoppgavene fra 2008 til 2015, med henholdsvis 13 prosentpoeng og 14 prosentpoeng. Her har vi altså indikasjoner på en klar dreining i kvalitativ retning i begge dimensjoner når det gjelder de norske elevene.

5.3 Progresjon og prioritering i ulike land: Singapore og Norge som eksempel

Som beskrevet i delkapittel 2.1 er TIMSS på alle nivåer læreplanorientert. Data fra TIMSS 4. trinn, TIMSS 8. trinn og TIMSS Advanced (13. trinn) gir dermed relevant bakgrunn for sammenlikning av læreplaner i ulike land, blant annet med hensyn til progresjon. I dette delkapitlet skal vi ikke se på prestasjonsdata, men vi skal se et eksempel på en analyse som kan bidra til å kaste lys over norske elevers progresjon innen matematikkfaget. I analysen sammenlikner vi Norge med Singapore. Singapore er et land som på mange måter representerer en annerledes kultur innen matematikkfaget enn den man finner i Norge. For eksempel gir denne kulturforskjellen seg utslag i verdiene for differansene NF-F og NT-T som vi fant for TIMSS i delkapittel 5.1.

Singapore deltar i TIMSS 8. trinn, men i likhet med andre østasiatiske land er de ikke med i TIMSS Advanced. Skal vi studere kulturforskjeller mellom Norge og østasiatiske land, ville naturligvis det ideelle være å bruke et østasiatisk land som deltok begge steder. At dette ikke finnes, er likevel ikke noe vesentlig hinder for den analysen vi skal gjøre her. Vi skal se på læreplaner og lærebøker i de to landene, og målet er å tegne et bilde av hvordan progresjonen er innenfor noen utvalgte matematiske emner. Spesielt er vi ute etter å se hvor lang modningstid elevene i de to landene får innen et knippe konkrete temaer. Temaene selv er i prinsippet tilfeldig valgt, så de kan ikke sies å gi noe annet enn eksempler. Likevel er temaene såpass sentrale for matematikkfaget at de er interessante i seg selv. Vi baserer oss hele veien på resultater fra (Draagen & Helvig, 2015).

Læreplaner i Norge og Singapore

Generelt er matematikklæreplanene i Singapore langt mer detaljerte med hensyn til faglig innhold enn hva tilfellet er i Norge (Draagen & Helvig, 2015). Videre har det i noen singaporske planer vært brukt en dobbel, parallell framstilling av stoffet: (i) En innholdsorientert beskrivelse («Content»), med form av en oppstilling av faglige temaer, og (ii) en prosessorientert beskrivelse («Learning experiences»), som gir beskrivelser av hva elevene skal ha mulighet til å arbeide med innen hvert tema. Under (i) finner man i de singaporske læreplanene blant annet utstrakt bruk av eksplisitte formler, noe som er fraværende i norske planer. For å finne et motstykke til beskrivelsen (i) i de

singaporske planene i Norge, må man gå tilbake til matematikkplanene fra 1970-årene og tidligere, for eksempel mønsterplanen fra 1974 (KUD, 1974). Den typen framstilling som man finner under (ii) i Singapore, har derimot fellestrekk både med prosessorienteringen man fant i den norske læreplanen fra 1997, altså L97 (KUF, 1996), og med en kompetansebasert framstilling. Prosessorienteringen av matematikkfaget i L97 ble drevet fram og støttet av dominerende strømninger i det norske miljøet innen matematikkdidaktikk. Ved innføringen av Kunnskapsløftet i 2006 (K06) (KD, 2006) ble imidlertid prosessorienteringen forlatt til fordel for en rent kompetansebasert beskrivelse. Tilsynelatende var da også alle didaktiske argumenter for en prosessorientert plan i matematikk glemte. Å bruke et dobbelt format av den typen man finner eksemplifisert fra Singapore på side 45 i (Draagen & Helvig, 2015), ble så langt vi kjenner til, ikke vurdert på høringsnivå ved den norske læreplanrevisjonen i 2006. Det er interessant at mens man i Norge har gått fra innholdsorientering (M74) via prosessorientering (L97) til kompetanseorientering (L06), har man i Singapore altså brukt de to første, og til dels alle tre, parallelt.

Både den norske matematikkplanen i L97 og etterfølgeren i K06 var lite detaljerte, og de var tenkt komplettert med lokalt læreplanarbeid. Mens begrepet «lokalt læreplanarbeid» naturligvis også eksisterer i Singapore, er utgangspunktet for slikt arbeid der langt mer fastlagt. I Norge har en del av den manglende spesifiseringen i læreplanen blitt kompensert for ved ulike typer veiledninger utgitt av Utdanningsdirektoratet og andre aktører. Resten har i praksis blitt overlatt til forlag og lærebokforfattere. Når man legger til at det i Norge, i motsetning til i Singapore, ikke lenger finnes noen offentlig godkjenningsordning for lærebøker, blir det klart at de sentralgitte læreplanene i Norge er langt mindre styrende enn i Singapore. Det er fordeler og ulemper med begge modeller, men det er klart at det singaporske systemet gir større muligheter for å styre langsiktig progresjon på tvers av trinn. De norske matematikkplanene er organisert i treårsbolker, og hvorvidt konkrete temaer innen for eksempel algebra da skal tas på 8., 9. eller 10. trinn, overlates i prinsippet til den enkelte skole, eller til lærebokforfattere. Hvis dette stoffet så er noe det bygges tungt videre på allerede i 11. trinn, kan man i den norske modellen få et problem med ujevn progresjon. Tas avgjørelsen om prioritering og stoffrekkefølge for trinn 8–10 på en skole (eller i en lærebok) som ikke dekker 11. trinn, er det rimelig å spørre om slike hensyn i tilstrekkelig grad blir ivarettatt. Vi skal komme tilbake til dette nedenfor.

Påvirkning fra læreplaner til lærebøker

Et spørsmål man kan stille seg, er i hvilken grad læreplanenes form påvirker lærebøkene rent framstillingsmessig. I (Draagen & Helvig, 2015) finner man en sammenlikning av tre norske lærebøker for ungdomstrinnet med to singaporske bøker fra tilsvarende trinn, samt en sammenlikning av tre norske lærebøker for 11. trinn (Matematikk 1T) med to singaporske bøker som omtrent tilsvarer dette trinnet. Når det gjelder lærebøkernes struktur, finner man her med referanse til rammeverket i (Johansson, 2005) at de norske bøkene preges av strukturen «exposition–examples–exercises». Dette betyr at man har en teori-gjennomgang etterfulgt av eksempler, og til slutt oppgaver. I bøkene fra Singapore er det derimot mer av strukturen «activities–course–exercises» (Johansson, 2005). Dette er annerledes ved at hvert nytt tema gjerne introduseres gjennom en aktivitet elevene skal arbeide med, noe som passer godt med prosessdelen av læreplanene i Singapore. Det er interessant å merke seg at den detaljerte opplistingen av innhold i de singaporske planene altså ikke nødvendigvis fører til en «tradisjonell» lærebokframstilling, i den betydningen av ordet «tradisjonell» som har vært brukt som et motstykke til en «reformorientert» matematikkundervisning (NCTM, 1989; Schoenfeld, 2004). Det er heller ikke slik at oppgavene i de singaporske lærebøkene preges av mindre kreativ resonnering og utforskning enn de norske. Tendensen i de undersøkte bøkene er den omvendte (Draagen & Helvig, 2015).

Progresjon i matematikkfaget

Vi skal her se på to eksempler som viser forskjeller i progresjonen på tvers av trinn i Norge og Singapore. I begge eksemplene er konklusjonen at singaporske elever får lengre tid til å la vanskelig matematikkstoff synke inn og modnes. Et slikt knippe av enkeltstående eksempler kan naturligvis framstå som anekdotisk bevisføring for visse læreplanteoretiske konklusjoner, og det er helt klart også mulig å finne eksempler på stoffområder der norske elever har en jevnere progresjon enn singaporske. Likevel kan det hevdes at eksemplene som gis her er symptomatiske for et ganske generelt bilde på trinn 8–11: Progresjonen i Norge med hensyn til sentralt modningsstoff er ujevn. Sammenliknet med Singapore er den norske progresjonen tregere fram til omtrent avslutning av ungdomstrinnet, deretter er den raskere.

Eksempel 1: Modningstid for stigningstall

(Nilsen, 2013) tar opp introduksjon av begrepet *stigningstall* og videre arbeid med dette som et eksempel på et progresjonsproblem i overgangen mellom ungdomstrinnet og videregående skole. I den norske undervisningsradisjonen er det vanlig at stigningstallet for en rett linje i (x, y) -planet defineres som endringen i y -retning når man beveger seg én enhet i økende x -retning. Som en introduksjon av begrepet har denne tilnæringsmåten mange fordeler. Imidlertid etterlyser Nilsen arbeid med mer fleksible metoder for å finne stigningstall på ungdomstrinnet. For eksempel er det sentralt for senere arbeid med å forstå begrepet *den deriverte* av en funksjon at elevene er kjent med beregning av stigningstallet etter en formel av typen

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Skrivemåten med bokstaven Δ for å markere endring i en størrelse er ikke det sentrale her; det sentrale er at man kan finne stigningstallet ved å se på endring i y delt på endring i x også i tilfeller der endringen i x ikke er 1. Dette er som kjent helt avgjørende for at elevene senere kan mestre abstraksjonsspranget det innebærer å la endringen Δx i x gå mot 0. Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer at tiden det tar fra begrepet *stigningstall* for en rett linje introduseres til begrepet *den deriverte* introduseres, er mye kortere i Norge enn i Singapore. I de norske lærebøkene kan introduksjonen av stigningstall typisk finne sted på 10. trinn, altså kun ett år før derivasjon introduseres i Matematikk 1T. I de analyserte lærebøkene fra Singapore introduseres stigningstall omtrent 3 år før begrepet derivasjon. I tillegg presenteres ikke en generell formel for stigningstall i de norske lærebøkene for 10. trinn, man baserer seg primært på tenkningen som tilsvarer $\Delta x = 1$. I de singaporske bøkene tilsvarende ungdomstrinnet arbeides det med mer varierte uttrykksformer og strategier for stigningstall; man snakker om *rise/run*, *vertical change* og *horizontal change*. Dette gjør at man i den norske tradisjonen får en mye raskere progresjon tilknyttet dette temaet senere. Elever som går videre til Matematikk 1T på 11. trinn, vil oppleve at den generelle tenkningen rundt begrepet stigningstall, med formelen $\Delta y/\Delta x$, introduseres kun noen måneder før de må ta et nytt sprang i abstraksjon: Da skal de arbeide med grenseprosesser der Δx beveger seg mot 0. Konsekvensen av denne raske progresjonen,

som i den norske tradisjonen kompenseres for manglende progresjon og modning gjennom ungdomstrinnet, kan bli at elevene faller av faglig.

Eksempel 2: Modningstid for algebraiske lover

Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer at tendensen i norske lærebøker er å utsette den mer avanserte algebraen til 10. trinn. Dette muliggjøres av at den norske læreplanen kun opererer med treårsbolker. Progresjonen innen algebra i de norske bøkene er også rykkvis. Et symptomatisk eksempel fra en norsk lærebok er at den algebraiske loven $ax + ay = a(x + y)$ introduseres relativt kort tid før elevene skal transformere uttrykk der de må bruke *sammensatte regneuttrykk* i rollene som a , x og y . Et eksempel på en omskriving av sistnevnte type er

$$7xyz + 21x^3y^2 = 7xy(z + 3x^2y)$$

Her brukes loven $ax + ay = a(x + y)$ med $7xy$ i rollen som a , z i rollen som x og $3x^2y$ i rollen som y . Dette er en tenkning som man kan argumentere for at ligger på et høyere abstraksjonsnivå enn det som tilsvarer kun den underliggende distributive loven $ax + ay = a(x + y)$. De norske elevene får altså liten tid til modning for den distributive loven før de skal bruke den i mer avanserte sammenhenger. I lærebøkene fra Singapore introduseres den distributive loven $ax + ay = a(x + y)$ allerede i 8. trinn. Mer avansert bruk av loven, som den vi viste et eksempel på ovenfor, kommer så i 9. trinn. Her er altså progresjonen ikke så rask som i Norge; elevene har et års modningstid for selve loven før man tar det neste spranget. Kort oppsummert er forskjellen at man i Singapore *starter tidligere*.

Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer også at singaporske lærebøker bruker generelle formler i forbindelse med funksjonslære på et tidligere tidspunkt enn de norske bøkene for ungdomstrinnet. I Singapore beskrives en lineær funksjon ved å bruke likningen $y = mx + c$ på trinnet som tilsvarer 8. trinn i Norge. I noen av de norske bøkene nevnes ikke lineære funksjoner på 8. trinn, i andre benyttes uttrykksmåter som « y lik x ganger et tall pluss et tall». Også denne forskjellen kan bidra til lengre modningstid for grunnleggende algebra i Singapore.

Det norske progresjonsproblemet vedrørende algebra på dette nivået har mange fellestrekk med eksemplet vedrørende stigningstall som ble diskutert ovenfor. I Norge markerer sluttfasen av Matematikk 1T (11. trinn) per i dag et

punkt hvor det gjøres et abstraksjonssprang som bygger på *både* begrepet stigningstall og generell forståelse for algebra. Når teorien for derivasjon introduseres, kommer man til en type teori som ikke engang lar seg formulere uten utstrakt bruk av variabler. Har elevene mangelfullt utviklet forståelse for algebra på dette tidspunktet, er instrumentell læring i fortsettelsen en naturlig konsekvens.

5.4 Oppsummering

Resultatene vedrørende sammenhengen mellom elevprestasjoner og oppgavens avhengighet av matematisk teori beskrevet i delkapitlene 5.1 og 5.2 viser at det er ulike kulturer og tradisjoner knyttet til matematikkundervisningen i ulike land og i ulike deler av verden. Resultatene indikerer at disse forskjellene ikke nødvendigvis er knyttet til ulik prioritering av ulike matematiske emneområder, men at de har å gjøre med ulik vektlegging av formell matematikk. Resultatene fra TIMSS Advanced fysikk viser at de kulturelle forskjellene knyttet til matematikk også kan ha konsekvenser utenfor matematikkfaget selv. Nedprioritering av formell matematikk kan resultere i progresjonsproblemer når man ser skoleløpet under ett. Sammenlikningen med Singapore i seksjon 5.3 viser eksempler på problemer som oppstår i den norske modellen, der elevene får kort modningstid for viktig fagstoff i tidsperioden fra 10. trinn til slutten av Matematikk 1T.