

Et matematikkdiraktisk perspektiv

Liv Sissel Grønmo

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet presenteres en del resultater fra tidligere matematikkdiraktisk forskning med relevans for matematikkundervisning i Norge. Vi ser nærmere på hva som legitimerer fagets plass i skolen – spørsmål om hvorfor elevene skal lære matematikk. Med det som bakgrunn drøfter vi innholdet i skolematematikken – hva elevene skal lære – for deretter å ta opp de mer metodiske spørsmålene om hvordan undervisningen kan legges opp og gjennomføres. Dette danner en forskningsbasert bakgrunn for de videre resultatene og drøftingene som presenteres i andre kapitler i boka.

Fagets hvorfor, legitimering av faget plass i skolen, tas opp i delkapittel 4.1. Fagets hva, innholdet i den matematikk elevene skal lære, tas opp i delkapitlene 4.2 og 4.3. I delkapittel 4.4 tas fagets hvordan opp, det som går på metodiske sider av undervisningen.

4.1 Legitimering av faget i skolen - matematikk for alle

Matematikk er et av de mest sentrale fagene i skolen. Opp gjennom tidene er ulike begrunnelser blitt brukt for hvorfor vi skal lære matematikk, for hva som skal være innholdet i faget, og for hvilke metoder som skal brukes i undervisningen. Både begrunnelsene og hva som har utkrySTALLISERT seg på bakgrunn av disse, har variert mye over tid og mellom land. De siste tiårene har matematikkdiraktikk utviklet seg til et betydelig forskningsområde når det gjelder slike spørsmål. Det er vedvarende diskusjoner omkring denne typen spørsmål både nasjonalt og internasjonalt.

At matematikk oppfattes som et kjernefag, avspeiler seg i den sentrale

plassen det har i grunnskole og videre utdanning verden over. Elevers prestasjoner i matematikk har også blitt brukt til å sortere hvem som skal få tilgang til ulike typer høyere utdanning. Men i et samfunn i stadig forandring og med mange fagområder som det er ønskelig at alle har kunnskaper i, er det ikke lenger selvsagt at så mye tid skal brukes til matematikk. Den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss nevner tre grunnleggende årsaker som ligger bak en allmenn matematikkundervisning verden over:

- *Den skal bidra til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet i grove trekk, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn og nasjoner.*
- *Den skal bidra til at samfunnet opprettholdes og utvikles politisk, ideologisk og kulturelt, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn eller nasjoner.*
- *Den skal gi individer de forutsetningene de trenger for å håndtere det som skjer i forskjellige perioder av livet deres – i utdanningen, i yrkeslivet, privat, på fritiden og i rollen som samfunnsborgere.* (Niss, 2003, s. 291)

I de fleste land begynte ikke samfunnet å tilby utdanning for bredere lag av befolkningen før på 1800-tallet. Norge fikk da en offentlig utdanning beregnet på folk flest. Grunnutdanningen i matematikk var aritmetikk, anvendt aritmetikk og deskriptiv geometri med vekt på måling og målbarhet. Begrunnelsen var å styrke samfunnets teknologiske og sosioøkonomiske utvikling. Utdanning ut over grunnskolen, som bare var tilgjengelig for et lite mindretall, skulle forberede elevene for frie yrker eller stillinger innen offentlig administrasjon, kirke eller skole.

Alle de tre argumentene nevnt over fikk økt betydning utover på 1900-tallet med «matematikk for alle» som en viktig drivkraft i den vestlige verden. I mange land, deriblant de skandinaviske, ble det lagt stor vekt på at et levende demokrati forutsetter kompetente samfunnsborgere. Begrunnelser som de nevnt ovenfor, framhever matematikkens nytteverdi såvel som dens allmenndannende betydning (Kaiser-Messmer & Blum, 1993). Matematikk har også vært begrunnet med det vi kan kalle formaldanning, at faget i seg selv er god «hjernetrim», den samme typen argument som tidligere ble brukt om latin (Niss, 2003).

Matematikk har vært og er viktig for den vitenskapelige utviklingen på mange områder, innen naturvitenskapene, økonomi og informasjonsteknologi.

Også på andre områder, som for eksempel medisin, samfunnskunnskap og språk, utgjør matematikk en viktig basis for mye av forskningen. Samfunnet er basert på mer eller mindre avanserte matematiske modeller og beregninger (Ernest, 2000; Skovsmose, 1994). Niss (1983) har pekt på det paradoksale i at vi lever i et samfunn hvor matematikk brukes til å styre og regulere det meste av dagliglivet vårt, samtidig som den enkelte kan fungere tilsynelatende utmerket uten særlig mye matematisk kunnskap. Matematikken har en objektiv relevans som basis i samfunnet, men en subjektiv irrelevans for den enkelte, som kan greie seg uten mye matematisk kunnskap (Niss, 1994). Det store spørsmålet blir derfor hvorfor alle elever skal lære matematikk – hvorfor dette faget har en så sentral rolle i undervisningen i skolen over hele verden.

Selv om man godt kan greie seg uten mye matematisk kunnskap, er det også mange situasjoner som forutsetter matematisk kunnskap for at man skal forstå og kunne innvirke på samfunnet rundt seg. For eksempel bygger moderne demokratier på at man kan «se hverandre i kortene», at man ikke bare skal overlate styringen til et fåtall eksperter. Politikere i dag henviser ofte til ulike tall og beregninger for å virke overbevisende i debatter. Budsjetter er mer styrende enn retoriske uttalelser. I et levende demokrati trenger politikere, som folk flest, fundamentale kunnskaper i matematikk for å være aktivt deltagende samfunnsborgere.

På det personlige plan trenger man også matematisk kunnskap, for eksempel for å ha oversikt over egen økonomi, og for å kunne handle varer og tjenester og vurdere ulike lånetilbud. Slik sett har matematisk kompetanse blitt sett på som et verktøy til personlig frigjøring (D'Ambrosio, 1985; Mellin-Olsen, 1987; Skovsmose, 1994). Matematikk berører oss alle også i mer trivielle daglige sysler. Når barn leker, når man spiller ulike spill, når man har turneringer i sport, når man leser aviser, og i mange andre daglige aktiviteter, er matematikk ofte involvert. Dagliglivet er gjennomsyret av matematikk. Ofte inngår det som en så naturlig del at man ikke tenker på det som matematikk.

Den enkeltes behov for matematikk i dagliglivet og som aktivt deltagende samfunnsborger har vært framhevet i både læreplaner og studier de siste tiårene. En internasjonal komparativ studie som PISA (Kjærnsli & Olsen, 2013) har en rammeplan som nettopp framhever slike begrunnelser for det de tester elevene i, det de kaller «mathematical literacy». Vi har ikke noe godt norsk ord for dette. I de nasjonale PISA-rapportene har man brukt noe ulike betegnelser (Kjærnsli & Olsen, 2013), og det har også blitt drøftet i flere artikler

(Olsen & Grønmo, 2006; Grønmo og Olsen, 2006). Det som kjennetegner oppgavene i PISA er at de hovedsakelig tester elevene i det man kan kalle i en dagliglivs- eller hverdagsmatematikk. Oppgavene i PISA presenteres hovedsakelig i en lengre tekst hentet fra en tenkt hverdagssituasjon eller annen kontekst fra virkeligheten. Ingen av oppgavene tester eleven i tradisjonell, ren, formell matematikk, se delkapittel 4.2 og kapittel 2 i boka for mer om dette. Vi bruker den engelske betegnelsen *mathematical literacy* en del steder i boka, en avklaring av begrepsbruken og betegnelser for dette faller utenfor rammene for denne boka.

Grunnleggende kompetanse i matematikk er viktig for mange jobber og utdanninger, og for å kunne bidra på en positiv måte til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet. Det er viktig for å opprettholde og utvikle landet i en positiv retning for landet selv eller i konkurranse med andre samfunn og land. Slike begrunnelser er det rimelig vil bli enda viktigere framover. Se for eksempel diskusjoner som dette:

<https://www.superprof.co.uk/blog/maths-and-the-modern-world/>

http://www.ncert.nic.in/pdf_files/Final-Article-Role%20of%20Mathematics%20in%20the%20Development%20of%20Society-NCER-.pdf

I Norge, som i andre nordiske og vestlige land, er det matematikk i dagliglivet for den enkelte som ofte har stått sentralt når man skal definere både hvorfor matematikk i skolen er viktig, og hvilket innhold som skal vektlegges i skolematematikken. Særlig gjelder det de siste tiårene. De store utfordringene samfunnet står overfor, ikke minst når det gjelder miljø og økonomi, og den raske teknologiske utviklingen vi ser, bidrar til å aktualisere behovet for en debatt om hvorfor elevene skal lære matematikk, og ikke minst hva som skal være innholdet i den matematikken de skal lære.

4.2 Innholdet i skolematematikken

I Norge, som i mange andre land, har det etter 2. verdenskrig vært satset mye ressurser på å gi alle landets borgere en god utdanning. Diskusjonene om hva som skal være innholdet i skolematematikken, kan sees i lys av denne store satsingen, det går både på hva matematikk er, og ikke minst hvilke deler av matematikken som skal inngå i en skole for alle (Ernest, 1991; Skovsmose, 1994).

Vi vil ta opp noen sider ved spørsmålet om hva matematikk er, men uten å reise den grunnleggende filosofiske debatten om dette. For mer om dette henviser vi til Skovsmose og Ernest (ibid.).

At det er mye diskusjon om innholdet i grunnskolematematikken, skyldes ikke minst at det er et fag som mange elever strever med (Naalsund, 2012). Gjennom det siste halve århundret har mange ulike syn på hva elevene skal lære, gjenspeilet seg i læreplanene. Med Sputniksjokket i 1957 oppstod et krav om å reformere skolematematikken, og resultatet var bølgen med «moderne matematikk» som i Norge gikk fram til slutten av 1970-tallet. Dette var et forsøk på å fokusere på matematikkens egenart, hvor begreper som mengder og logiske operasjoner ble sentrale i innholdet i skolen. Redusert elevkompetanse knyttet til rene regneferdigheter gav så en reaksjon med slagordet «back to basics», som innebar økt vektlegging på elementære ferdigheter i matematikk. På 1980-tallet var «problemløsning» en populær betegnelse på det man håpet skulle bli en fornyelse av faget. Ikke minst avspeilet dette seg i den daværende norske læreplanen: «Problemløsning er tatt med som eget hovedemne og skal være en del av all matematikkopplæring» (KUD, 1987, s. 195). På 1990-tallet var det gjerne matematikk knyttet til dagliglivet som ble framhevet, noe som avspeilet seg i L97, hvor «Matematikk i dagliglivet» nå var det første overordnede målområdet (KUF, 1996). I de senere læreplanene har også det praktiske og konkrete vært framhevet som viktig i læreplanene (KD, 2006). Noen av disse aspektene går mer på metodiske sider av faget (se delkapittel 4.3), som for eksempel problemløsning og at undervisningen skal ha en praktisk og konkret tilnærming.

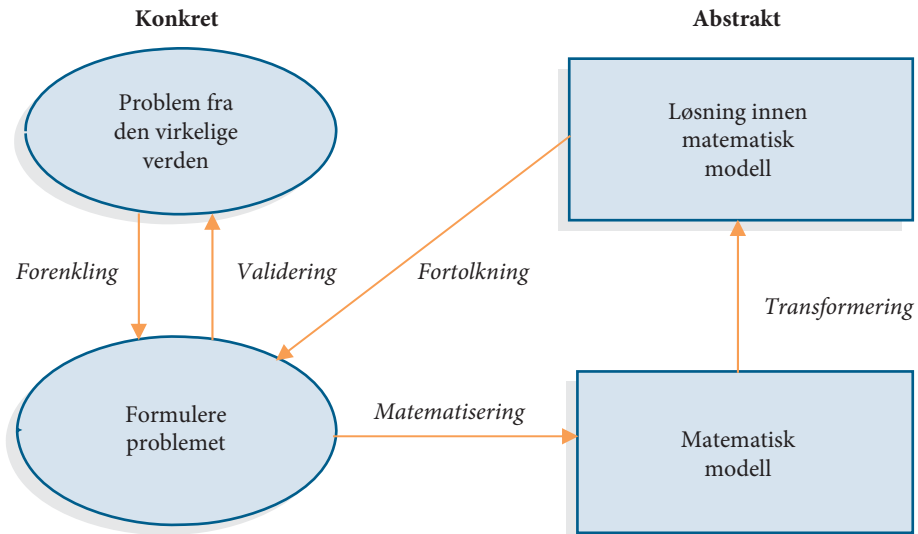
Utviklingen av nye læreplaner i Norge er påvirket av internasjonale trender. Ulike betegnelser har blitt brukt om forsøkene på å fornye matematikkfaget og gjøre det lettere tilgjengelig. Mange av disse er det ikke like lett å finne gode norske betegnelser for. Det gjelder for eksempel *numeracy*, eller numeralitet, *mathematical literacy* og *quantitative literacy*. Slik betegnelsen *mathematical literacy* brukes på engelsk, favner det for eksempel videre enn det norske «matematikk i dagliglivet».

Matematikken er beskrevet som vitenskapen om mønstre og sammenhenger (Devlin, 1994). Det kan dreie seg om å lete etter mønstre og lovmessigheter i en egen matematisk verden, hvor man for eksempel studerer hva som kjenner seg ut som ulike tallmønstre som primtall eller periodiske desimaltall. Det kan også dreie seg om å bruke matematikk til å studere mønstre og lovmessigheter

på andre felt, som for eksempel naturfag eller økonomi (Freudenthal, 1983; Steen, 1990). Men matematikk er ikke bare systemet eller produktet, det vi kan kalle svaret på problemet. Det er etter hvert blitt mer vanlig også å ta hensyn til prosessaspektet ved matematikk. «Matematisering» har da blitt brukt som en betegnelse for prosessaspektet. Man er da ikke bare opptatt av løsningen på en oppgave, men retter oppmerksomheten like mye mot selve aktiviteten, den prosessen som foregår når man arbeider med oppgaven. Betegnelsen matematisering brukes også på en litt annen måte, om prosessen med å gå fra et gitt problem i den virkelige verden til å omsette dette til et matematisk språk, slik det er illustrert i figur 4.1.

Forholdet mellom ren og anvendt matematikk har vært en del av diskusjonene av hva som skal være innholdet i skolematematikken. Det på tross av at et slikt skille kan synes noe problematisk i et historisk perspektiv. For eksempel har mange kjente personer i utviklingen av matematisk kunnskap, som Newton, Fermat, Descartes og Gauss, for å nevne noen, ikke lagt vekt på et slikt skille – en indikasjon på at de så på matematikk som noe som skulle undervises i som en helhet (Kline, 1972). På den andre siden har et slikt skille ofte vist seg å være nyttig i diskusjoner om hva som skal være innholdet i matematikk i skolen. Vi vil derfor bruke en modell, se figur 4.1, som brukes mye til å illustrere

Figur 4.1 Forholdet mellom den virkelige verden og den matematiske verden (etter *Standards*, NCMT 1989)



sammenhengen mellom ren og anvendt matematikk. Den internasjonale studien PISA bruker for eksempel en tilsvarende modell som illustrasjon for å beskrive den matematiske kompetansen de tester elevene i (Kjærnsli et al., 2004), det de kaller *mathematical literacy*. Oppgavene i PISA dekker hele syklusen i figur 4.1. De tar utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden og tester hvor gode elevene er til å analysere problemet, og til å bruke matematikk for å løse det. I TIMSS og TIMSS Advanced testes elevene med oppgaver *både* i ren formell matematikk, det vil si oppgaver uten noen kontekst fra den virkelige verden, og i oppgaver som tar utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden, slik som vist i figur 4.1. For mer om hvilken type matematisk kompetanse som testes i de ulike internasjonale studiene, henviser vi til kapittel 2.

Høyre side av figuren viser den matematiske verden, en egen abstrakt verden med veldefinerte symboler og regler. Venstre side forestiller den virkelige, konkrete verden som omgir oss. Ren matematikk, som arbeid med tall uten å knytte det til problemer fra virkeligheten, vil bare foregå på høyre side av figuren. Å beregne svaret på et addisjons- eller multiplikasjonstykk eller å finne verdien av x i en likning, er eksempler på arbeid innen ren matematikk. I anvendt matematikk tar man utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden. Man må da først gjøre en forenkling og formulere problemet klart, så skal dette matematiseres og ende i en matematisk modell. Deretter arbeider man innen den rene matematiske verden med en transformasjon av den matematiske modellen. Hvis man arbeider med tallsymboler, kan det for eksempel være å foreta en utregning, i algebra kan det være en manipulering med bokstavsymboler. Løsningen man kommer fram til, må være riktig i henhold til de regler som gjelder innen den matematiske verden. Så skal løsningen relateres tilbake til den virkelige verden gjennom en fortolkning av hva dette innebærer for det formulerte problemet. Til slutt skal rimeligheten av svaret valideres i forhold til det opprinnelige problemet. Anvendelse av matematikk forutsetter derfor både at man kan orientere seg med en rimelig sikkerhet i den rene matematiske verden, og at man med utgangspunkt i en virkelig problemstilling kan matematisere og sette opp en modell som man arbeider med, for til slutt å relatere svaret tilbake til problemet i den virkelige verden. Anvendt matematikk er derfor i sin natur kompleks.

Arbeid innen ren matematikk, som utregninger, omforming og manipulering med matematiske symboler, har tradisjonelt hatt en sterk posisjon i skolematermatikken. I dette matematiske universet er matematikk en sikker, presis og

eksakt vitenskap, hvor teorier og teser kan bevises eller motbevises. I det øyeblikk vi forbinder matematikk med virkeligheten, er ikke matematikk mer presis enn andre typer vitenskap. Enhver anvendelse er forbundet med usikkerhet. Albert Einstein har uttalt at «As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, as far as they are certain, they do not refer to reality» (Humboldt, 2004).

Med økt vekt på anvendelse av matematikk kan det synes som om betydningen av å forstå at matematikk i seg selv er en eksakt og sikker vitenskap, i noen grad har forsvunnet fra skolematematikken (Gardiner, 2004). Formuleringer som «bare en manipulering med symboler» er blitt brukt om matematikk som «bare» opererer på figurens høyre side. Arbeid innen ren matematikk forutsetter i høyeste grad refleksjon og forståelse, men da innen den matematiske verden. Dette kan for eksempel være refleksjon rundt sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon eller forståelse av brøk og desimaltall som ulike representasjonsformer. Å forstå og gi mening til ren matematikk er i seg selv en stor utfordring, selv når vi begrenser det til områdene tall og tallregning. På samme måte trenger man en grunnleggende forståelse av ren algebra, av regler og prosedyrer innenfor det matematiske universet, for å kunne bruke algebra for å løse problemer fra den virkelige verden, det vi kan kalle anvendt matematikk. På samme måte som med tall forutsetter anvendelse av algebra at man har en rimelig god basis i ren algebra.

Gardiner (2004) peker på at det økende fokuset på anvendt matematikk som man har sett i mange vestlige land, som de nordiske, førte til at man i mindre grad la vekt på å gi elevene den nødvendige kunnskapen innen ren matematikk som aritmetikk og algebra. Gardiner argumenterer imot tanken om at anvendelse av matematikk kan sees som *et alternativ til å lære elevene ren matematikk*, eller som en enklere vei til matematisk kunnskap, selv om noen synes å tro det.

Mathematical literacy» and numeracy are often presented as though they were alternatives to traditional school mathematics, rather than byproducts of effective instruction. (Gardiner, 2004, s. 2)

Det synes uproblematisk å akseptere at et viktig mål for undervisningen i skolen skal være at alle utvikler en type kompetanse vi kan betegne som «mathematical literacy», at alle elever skal få de nødvendige kunnskaper for å anvende

matematikk på problemstillinger de møter i dagligliv og samfunnsliv. Men innholdet i en slik undervisning for å fremme anvendelse av matematikk på problemer i dagligliv og yrkesliv, er det ikke sikkert at kommer til å inneholde så mye nytt:

Mathematics teaching may be less effective than most of us would like; but we should hesitate before embracing the idea that school mathematics would automatically be more effective on a large scale if the curriculum focused first on «useful mathematics for all» (numeracy), with more formal, more abstract mathematics to follow for the few. Experience in England (and elsewhere) suggests that such a program may be possible if one is willing to restrict the initial focus to truly basic material (integers, fractions, decimals, proportion, word problems, algebra and geometry), and to teach it in a way which prepares the ground for subsequent developments; but one should not be surprised if such a program turns out to look strangely like what good mathematics teaching has always been. (Gardiner, 2004, s. 2)

I L97 ble det på den ene siden framhevet at matematikk skal knyttes til dagligliv og anvendelser, på den andre siden står det i planen at elevene skal få fundamentale kunnskaper og ferdigheter i faget. Men den typen matematikk som er mest anvendbar i dagliglivet, er ikke nødvendigvis den typen matematisk kunnskap som er mest anvendelig i mange yrker og profesjoner. Her er det snakk om en avveining av ulike hensyn, som hvor mye vekt skal man legge på ren matematisk kunnskap med sikte på videre utdanninger og yrker i forhold til mer elementær kunnskap som man trenger i dagliglivet. I et samfunn i stadig utvikling mot mer teknologiske løsninger, og med større utfordringer innen områder som miljø, økonomi og helse, er det nødvendig med en kontinuerlig debatt om å finne den rette balansen her. Men uansett hvilken type matematisk innhold man ønsker å legge vekten på, må man være klar over at enhver anvendelse av matematikk forutsetter en rimelig god kompetanse med grunnleggende faglige fakta, ferdigheter og begreper fra den rene matematikken. Uten dette grunnlaget har man lite å anvende.

På samme måte som mathematical literacy i dag framheves, var det «problem-løsning» som ble framhevet for noen år siden. Også når det gjaldt problem-løsning, har mange studier pekt på at det er viktig å ha gode elementære faglige kunnskaper og ferdigheter for å være en god problemløser i matematikk

(Bjørkquist, 2001; Schoenfeld, 1992). Hverken mathematical literacy eller problemløsning gjør behovet for grunnleggende faglige kunnskaper i ren matematikk mindre. Den faglige basisen kommer vi ikke utenom, selv om vi vet at mange må slite for å skaffe seg denne. Tall, tallregning og algebra kan man se på som motoren i matematikken. I det ligger det at det er disse fagområdene som er de mest fundamentale, både når det gjelder dagliglivsmatematikk og bruk av matematikk i mer profesjonelle settinger i yrkeslivet. Det betyr ikke at andre fagområder som statistikk og geometri ikke er viktige, men at en forutsetning for å lære statistikk og geometri er at man har elementære kunnskaper i tall og algebra.

Selv om man blir enige om at alle trenger en faglig basis i ren matematikk, har man fortsatt spørsmålet om hva av innholdet i den rene matematikken man skal legge hovedvekten på, i grunnskolen og i den videregående skole. Den delen av ren matematikk som ubetinget er aktuell for alle i skolen, og som danner en nødvendig basis for anvendelser i dagligliv og samfunnsniv, består for en stor del av fakta, ferdigheter og begrepsforståelse innen tall og tallregning. Men i et moderne samfunn i en rivende teknologisk utvikling er spørsmålet om dette er nok, eller om det er andre deler av ren matematikk som mange av elevene, kanskje alle, vil trenge en god basis i. Det fagområdet som da peker seg ut, er algebra. Det betyr ikke at kunnskaper innen ren geometri ikke er viktig, men at algebra, som tall og tallregning, peker seg ut som mer essensiell.

Algebra kan sees på som et matematisk språk som man også trenger for å lære seg geometri eller andre fagområder i matematikk. At man trenger basiskunnskaper i et lands språk for å lykkes i det landet, er allment akseptert. Det samme kan sies om algebra; kompetanse i algebra er essensielt i alle typer utdanninger hvor man bruker dette matematiske språket. Å lære et språk tar tid, det trenger å modnes over tid gjennom systematisk trening og bruk i varierte situasjoner. Det er også allment akseptert at man lettere lærer seg et språk når man er yngre. Til en viss grad kan også det stemme for det matematiske språket algebra, bortsett fra at her lærer man aritmetikk først, før man lærer det man kan se på som en generalisert form av aritmetikken. Også når det gjelder algebra, kan man kanskje ha en fordel ved å legge et visst grunnlag tidlig, på samme måte som med andre språk.

Det har de siste ti-femten årene vært en økende oppmerksomhet omkring det at mange elever i dagens samfunn trenger mer matematisk kunnskap

(Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Nødvendigheten av å se tall og tallregning, aritmetikk, i sammenheng med algebra har også vært framhevet:

Traditionally, arithmetic and algebra have been viewed as two distinct domains, with algebra instruction coming years after the first arithmetic concepts are taught (Carraher & Schliemann, 2007). Perhaps this segregation of algebra instruction from arithmetic instruction explains why formal algebra, typically introduced in lower secondary school, presents an immense obstacle for many students. (Naalsund, 2016)

Den nedtoningen av ren formell matematikk som vi har sett i Norge, er ikke like framtreddende i en del andre land. Det tas opp og drøftes i neste delkapittel.

4.3 Vektlegging av faglig innhold i ulike land

Data fra internasjonale komparative studier som TIMSS, TIMSS Advanced og PISA gir oss muligheter til å gjøre analyser med sikte på å si noe om hvilket faglig innhold ulike land legger vekt på i sin undervisning. Denne typen analyser har blitt gjort på data helt fra den første TIMSS- og TIMSS Advanced-studien i 1995. Ofte har man brukt en type clusteranalyse hvor man leter etter det vi kan kalle «item-by-country interactions» for å finne likheter og forskjeller mellom hvilken type faglig innhold ulike land eller grupper av land legger relativt mest eller minst vekt på (Grønmo & Olsen, 2006; Olsen, 2006; se også kapittel 5 i denne boka). Fordi vi her snakker om landenes relative prestasjoner på ulike typer av oppgaver, kan land med ulikt prestasjonsnivå likevel ha samme mønster for *hvilken type faglig innhold* de vektlegger mest i matematikk. Analyser av data fra 8. trinn i den første TIMSS-studien i 1995 konkluderte med at man fant fem grupper av land med klare likhetstrekk for hva som ble vektlagt i matematikk: en nordisk gruppe, en engelskspråklig gruppe, en østeuropeisk gruppe, en østasiatisk gruppe og en tyskspråklig gruppe (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004a). Basert på mange senere analyser av data fra TIMSS, TIMSS Advanced og PISA har man konkludert med at man kan snakke om fire ulike profiler i matematikkundervisning i ulike land som har vist seg å være konsistente over de siste 20 årene, på ulike nivåer i skolen og i ulike studier med ulikt rammeverk for hvilke typer matematisk kunnskap de tester elevene i. Den første

analysen av data fra TIMSS 1995 konkluderte med fem ulike profiler for matematikk i skolen, men da den tyskspråklige profilen ikke har vist seg like konsistent over tid og i ulike studier som de andre fire, vil vi i det videre ikke forholde oss til denne. Vi konsentrerer oss om de fire fra den første TIMSS-studien som senere har vist seg å være konsistente over tid, på ulike nivåer i skolen og i ulike studier. Konklusjonene fra den første analysen basert på 1995-data var også at selv om man har fire ulike profiler for innhold i matematikk i skolen, kan man også snakke om *to ulike typer* profiler.

Det baserer seg på at selv om man har fire distinkte profiler for innhold i matematikk i skolen, har *to og to av disse profilene* en del viktige fellestrekk. Den engelskspråklige profilen og den nordiske profilen har klare likhetstrekk, det samme har den østeuropeiske profilen og den østasiatiske profilen. Den østeuropeiske og den østasiatiske profilen legger relativt mest vekt på oppgaver i det vi kan kalle klassisk, ren, formell matematikk som eksakt regning med tall og algebra. I motsetning til dette legger land i den nordiske og i den engelskspråklige profilen relativt liten vekt på klassisk, ren, formell matematikk som eksakt tallregning eller algebra. Hovedvekten i disse profilene er matematikk knyttet til dagliglivet, som overslagsregning, avrunding av tall og statistikk. Dette resultatet har vist seg å være konsistent i senere analyser basert på data fra TIMSS 2003, PISA 2003 og TIMSS Advanced 2008, og er dokumentert i flere artikler (Grønmo et al., 2004; Olsen & Grønmo, 2006).

Analysen av data fra den internasjonale studien av lærerutdanning i matematikk som Norge deltok i, TEDS-M 2008 (Tatto et al., 2012), har vist det samme mønsteret mellom land (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013). Disse analysene er selvsagt avhengige av hvilke land som deltar i de ulike studiene, men de fire profilene har likevel vist seg å være konsistente. Man har derfor svært god dokumentasjon på at man *har* disse profilene av land som har vært stabile over de siste tiårene.

PISA tester elever med oppgaver som hovedsakelig er i en type dagliglivs- eller hverdagskontekst, og har ingen tradisjonelle, rene matematikkoppgaver i for eksempel algebra (Olsen & Grønmo, 2006; Wu, 2009). Se også kapittel 2 i denne boka. TIMSS på ungdomstrinnet tester elevene i oppgaver i tradisjonell, ren matematikk, som tallregning og algebra, og noen oppgaver satt i en mer dagligdags kontekst, men uten å være krevende når det gjelder å lese og analysere en relativt lang tekst. TIMSS Advanced tester elevene i mange tradisjonelle rene oppgaver, for eksempel i algebra og geometri, og i noen oppgaver satt i en

hverdagskontekst, men også disse uten å være så krevende når det gjelder å lese og forstå den utenommatematiske konteksten som i PISA. På tross av dette finner vi de samme konsistente profilene av land i alle disse studiene, hvilket styrker konklusjonene om at det er konsistente profiler for hva slags innhold land legger mer og mindre vekt på å lære elevene. TEDS-M 2008-studien testet lærerstudenter i oppgaver både i ren formell matematikk, som løsning av algebraiske likninger, og i oppgaver for hvordan man skal undervise i ulike faglige emner (Tatto et al., 2012). Men de profilene som ble funnet, var de samme, også på dette nivået i utdanningssystemet.

Konklusjonene om ulik vekt på ulikt matematisk innhold understøttes også av andre typer analyser (Hole, Grønmo & Onstad, 2017; Hole et al., 2015), se også kapittel 2 i denne boka. Hva som skal være innholdet i skolematematikken, er derfor ikke et enkelt spørsmål å svare på. Mange vil kanskje tro at i hvert fall i et fag som matematikk vil innholdet være ganske likt i de forskjellige landene. De mange analysene vi har referert til over, viser at dette varierer ganske mye. I et samfunn i stadig utvikling, med nye krav til hva elevene trenger av kompetanse for utdanning og yrkesliv, etterlyser vi en åpen og konstruktiv debatt om dette, med utgangspunkt i de begrunnelsene samfunnet har for å lære elevene matematikk (Niss, 2003). Dette stiller sentrale spørsmål rundt både prioritering og progresjon av faglig innhold i skolen, en helt nødvendig debatt når man nå skal revidere læreplanene i matematikk.

4.4 Undervisning i matematikk i skolen

Hvordan undervisningen legges opp og gjennomføres i skolen, er også et viktig spørsmål som påvirker elevenes læring. Noen lands læreplaner gir klare retningslinjer for hvilke metoder som bør brukes, mens dette i andre land er mer opp til den enkelte skole eller lærer. Dette varierer også over tid i de ulike landene. Flere av læreplanene i Norge de siste tiårene har ikke bare omhandlet hva elevene skal lære, men også metoder for hvordan undervisningen skal gjennomføres. I Norge gjelder det særlig læreplanene fram til kvalitetsreformen i 2006. På 1980–90-tallet var det mye vekt på prosjektorientert undervisning i Norge, som i de andre nordiske landene. Noen av de mest toneangivende på dette feltet var danske forskere, som gjorde seg til talsmenn for at mer eller mindre all undervisning skulle organiseres som prosjekter (Berthelsen, Illeris & Poulsen,

1987). Det interessante er at noen av de forskerne som skrev dette, senere har bedt om unnskyldning og sagt at de tok feil:

For tredive år siden, i slutningen af 70'erne, kastede jeg og to andre pædagogiske forskere os ud i et næsten revolutionært projekt: at skrive den første store håndbog i tværfagligt, problemorienteret projektarbejde i folkeskolen. Den blev færdig, udsolgt, revideret og genudgivet, oversat og udgivet i Sverige og Norge, genimporteret, forkortet og udgivet igen på nyt forlag i Danmark. Mange andre lignende bøger fulgte efter. Succesen var total, og i dag tredive år senere er projektpædagogik nærmest blevet til en kongelig rekommanderet forpligtelse overalt i det danske uddannelsessystem, ikke mindst i folkeskolen.

...

... Men i dag står jeg – nu ikke som forsker, men som pædagogisk konsulent – i de samme klasseværelser og kan se de katastrofale omkostninger, som den ensidige begejstring for «tværfaglighed og projektarbejde» har medført: Lærerne ved ikke, hvordan elever og kursister kan tilegne sig fundamentale, faglige basiskundskaber på en sådan måde, at de er præsentable og brugbare! Vi har nemlig fortrængt hukommelsens betydning for læring. Vi har smadret Den Sorte Skole og smidt barnet ud med badevandet og triumferet bagefter. Det er en katastrofe. Når det kunne komme så vidt, så skyldes det, at vi, der indførte projektpædagogikken, selv havde gået i en skole, hvor vi havde fået kundskaber. Dem tog vi for givet, fordi vi selv havde gået i den. Men vores hadefulde opgør med den vidensorienterede skole var så succesrig, at den i dag er fuldstændig udraderet. Det betyder, at den tværfaglighed, problemorientering og projektarbejde, som børn og unge i dag udsættes for, hviler på et ekstremt skrøbeligt grundlag af manglende fagkundskaber og tilfældige informationer fra internettet. (Poulsen, 2010)

Det er interessant at forskerne som sto i spissen for innføringen av prosjektarbeid i skolene i Norden, tok for gitt at elevene hadde de grunnleggende kunnskapene de trengte. Som de selv sier: Vi hadde disse kunnskapene selv og tok for gitt at det hadde også elevene som kom etter oss, så vi konsentrerte oss bare om metoden prosjektarbeid.

I Norge på 1990-tallet var problemløsning tatt med som første hovedemne i matematikkplanen (KUD, 1987), og det ble framhevet at det «skal være en del

av all matematikkopplæring». Rundt årtusenskiftet var det også mye oppmerksomhet rundt det som ble kalt diagnostisk undervisning (Brekke, 1995), også det en metodisk tilnærming til hvordan matematikkundervisningen skulle foregå. Læreplanen av 2006, Kunnskapsløftet (LK06) (KD, 2006), som omfattet grunnskolen, videregående skole og voksenopplæringen, førte til mange endringer både av skolens innhold, organisering og struktur. Det ble for eksempel framhevet at det skulle være metodefrihet, i motsetning til planen av 1997 (KUF, 1996) hvor lærerne ble pålagt å ha en viss andel som prosjektundervisning, og hvor metoden problemløsning sto som det første målområdet som «skulle gjennomsyre all undervisning».

Med ny læreplan i 2006/2007 ble læringsmålene tydeliggjort, og det ble understreket at «*Den nye planen gir skolene mer handlefrihet og lærerne mer metodefrihet, sa utdanningsminister Kristin Clemet (H) da hun presenterte læreplanen i dag.*» (Clemet, 2005)

Det er ikke unaturlig at trender skifter over tid. Det som framstår som bekymringsfullt, er at det gjentatte ganger er mer eller mindre én bestemt måte å undervise på i faget som framheves som svaret på utfordringene med å lære elevene matematikk. Det framstår også som problematisk at lærerne i stor grad forventes å følge slike skiftende trender med ganske ensidig vekt på én type metode i undervisningen. I undervisning, som så mange andre steder i samfunnet, er det kanskje *variasjon i metoder* som er viktig. NCTM-rapporten fra 2014 framhevet nettopp behovet for å implementere et bredt spekter av grep og praksiser i undervisningen (NCTM, 2014). Man må også være klar over at ulike elever kanskje lærer best med ulike metoder. Det er antakelig viktigere med variasjon og balanse mellom ulike metoder, enn å lete etter den ene rette metoden.

I tidligere rapporter fra internasjonale studier som TIMSS og TIMSS Advanced har det blitt påpekt at én ting som kjennetegner undervisningen i matematikk i norsk skole, er en ensidighet i bruk av metoder (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Grønmo & Onstad, 2009), mens land som presterer bedre enn oss, i større grad ser ut til å bruke mer varierte metoder. Vi har ikke slike data fra PISA-studien, da de ikke har noe lærerspørreskjema hvor lærerne skal svare på spørsmål om hvordan de legger opp undervisningen. I TIMSS og TIMSS Advanced har både elever og lærere fått spørsmål om undervisningen i klassene.

Analyser av resultater fra tidligere internasjonale studier har også sammenliknet land når det gjelder bruk av elektroniske hjelpemidler som kalkulatorer. Det interessant her er at i flere studier er det land som i liten grad anvender

slike elektroniske hjelpemidler som presterer best, ikke land som Norge (og Sverige) som ligger på topp i slik bruk (Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Dette betyr ikke at man ikke skal bruke slike hjelpemidler i skolen, men at man skal vurdere nøye på hvilken måte, når og i hvor stort omfang det er hensiktsmessig for elevenes læring å bruke dem. Det kan være fristende å tro at utstrakt bruk av elektroniske hjelpemidler gir en mye lettere vei til læring, særlig i et rikt land som Norge, som også av den grunn er utsatt for et stort press om å bruke dem fra kommersielle interesser. Men vanskelige utfordringer som hvordan man skal lære elevene matematikk, har sjelden enkle løsninger som å gi dem en kalkulator eller en datamaskin. Det er rimelig å tro at riktig og gjennomtenkt bruk kan være til hjelp, men vi kommer ikke utenom at den grunnleggende faglige forståelsen fortsatt vil komme gjennom systematisk hardt arbeid. Som det sto i PISA-rapporten fra 2004:

Hemmeligheten bak god faglig framgang ligger i målbevisst arbeid mot definerte mål. At dette til en viss grad fortoner seg som litt av en hemmelighet i norsk skole, på tross av at det burde være velkjent nok, henger trolig sammen med at målbevisst arbeid mot definerte mål faktisk kan være ganske strevsomt. (Kjærnsli et al., 2004, s. 260)

Det har vært mye forskning på elevers problemer med å lære matematikk, noe som har ført til et økt fokus på hvordan svake elever lærer faget. Samtidig som det har vært positivt at elever som sliter faglig, får bedre undervisning i skolen, har det kanskje vært litt lite fokus på hvordan elever med interesse og talent for faget lærer (Grønmo, Jahr, Skogen & Wisted, 2014). Et underliggende premiss synes å være at alle elever vil tjene på at vi legger opp undervisningen etter de som sliter faglig. Men elever er forskjellige, og måten de lærer på, er derfor antakelig også ulik. Noen elever liker å jobbe abstrakt, og lærer kanskje best med en mer abstrakt innfallsvinkel, mens andre vil være mer konkrete og praktiske i sin tilnærming. Dette reiser også spørsmålet rundt differensiering i skolen, noe som har kommet mer på dagsorden den senere tid. Dette er et komplisert spørsmål, selv fra et rent faglig perspektiv. Hvis debatten i tillegg mer blir et ideologisk spørsmål, at man er prinsipielt for eller imot differensiering, er det vanskelig å føre en rasjonell debatt. Uansett er dette et så vesentlig spørsmål at man her trenger både mer forskning, mer diskusjon og mer ut-

prøving av hva som ser ut til å fungere positivt. Vi henviser også til kapittel 7 i denne boka som tar opp noen problemstillinger knyttet til differensiering.

Hvordan et land legger opp sin undervisning, både med hensyn til tilnæringsmåte i undervisningen, og med hensyn til differensiering, varierer mye mellom land. Tiden er kanskje nå moden for å se på og sammenlikne det vi ser i norsk skole med hvordan dette gjøres i andre land. Da tenker vi ikke bare på land som ligger nær oss når det gjelder tradisjoner i matematikk i skolen, og som gjerne har mange av de samme utfordringene som vi har. Vi tenker også på land med andre tradisjoner, ikke minst land som ser ut til å gi elevene bedre muligheter til videre utdanning og yrker gjennom å gi dem en bedre basis i matematikk i grunnskolen og i videregående skole.

I Norge ser man tendenser til at vi bare sammenlikner oss med andre land i Norden, eventuelt utvider det til å gjelde engelskspråklige land eller OECD-land som vi har mye til felles med, med en underliggende holdning om at mange andre land er så ulike oss at sammenlikninger ikke er interessante. Det er da fristende å minne om hva en tidligere norsk statsminister, Lars Korvald, sa i en tale på Stortinget en gang på 1970-tallet: «Norge er et land i verden» (Korvald, 1972). Dette har det blitt fleipet med, men innholdet i utsagnet er kanskje vel så relevant i dag som da det ble sagt.

4.5 Avsluttende kommentarer

Dette kapitlet tar ikke mål av seg til å gi en utfyllende oversikt over skolematematikkenes hvorfor, hva og hvordan. Disse spørsmålene er for store og omfattende til at man i en kort artikkel i ei bok kan gjøre det på en fyllestgjørende måte. Hensikten har vært å redegjøre for noen av de trendene man har hatt i skolen de siste tiårene, og som kan antas å ha påvirket elevenes resultater slik vi måler disse i de internasjonale komparative studiene. Vi har lagt vekt på å velge ut forskning med spesiell relevans for det vi tar opp ellers i boka. Kapitlet er derfor å anse som en type bakgrunnsinformasjon for drøftingene i andre deler av boka.