KAPITTEL 12

Et universitetsperspektiv på matematikk i TIMSS Advanced

Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Det er viktig at skolematematikken gir elevene grunnlaget de trenger for videre studier. Elevene i videregående skole som testes i TIMSS Advanced tar matematikk for realfag «til topps» med faget Matematikk R2 (heretter: R2) – et programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering. Resultatene fra TIMSS Advanced vil således kunne si noe om forkunnskapene i matematikk for begynnerstudentene på universiteter og høgskoler (heretter: UH-sektoren). Informasjon om dette er verdifullt grunnlagsmateriale for arbeid med å hjelpe elevene i overgangen fra skole til høyere utdanning innen matematikktunge fag.

Sjangermessig er dette kapitlet noe annerledes enn de fleste av denne bokens kapitler. Begge forfatterne har i mange år arbeidet med undervisning på begynnerkurs i matematikk ved universiteter og høgskoler, kurs som bygger på R2. De vinklingene og eksemplene vi gir, er naturligvis preget av vår egen erfaringsbakgrunn. Uvegerlig baserer vi oss på vårt eget bilde av matematikkmiljøet innen de aktuelle delene av UH-sektoren. De aktuelle delene er i vår sammenheng tilbydere av matematikktunge studieveier, studieveier som innholdsmessig bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole. Typiske eksempler er studieprogrammer innen realfag og teknologi.

Som vårt primære eksempel skal vi i dette kapitlet bruke begynneremnet MAT1100 ved Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet (MN), Universitetet i Oslo (UiO). I delkapittel 12.2 skal vi eksemplifisere hvordan sviktende bakgrunnskunnskaper fra videregående skoles matematikk slår ut blant studenter som strøk på avsluttende eksamen i dette emnet høsten 2015. I delkapittel 12.3 skal vi diskutere et utvalg oppgaver fra TIMSS Advanced i et UH-perspektiv. Her skal vi blant annet sammenlikne med en konkret oppgave gitt til eksamen i kurset MAT1100.

12.1 Overgangsproblemene

Det er vel kjent og mye diskutert at mange elever møter store utfordringer i overgangen mellom videregående skole og universitet og høgskole, og spesielt i matematikk. Matematikkundersøkelsen til Universitets- og høgskolerådet (UHR, 2014) er en av indikatorene på dette. En ting begynnerstudenter i matematikk trekker fram som en utfordring er uvant notasjon og symbolbruk (UHR, 2014). I formålet for programfag i matematikk for realfag står det: «Arbeid med programfaget skal gi en innføring i logisk og analytisk tankegang med vekt på matematisk argumentasjon og framstillingsform» (KD, 2006). Å bli fortrolig med matematisk skrivemåte og tankegang tar tid. Det er dermed viktig å eksponere elevene for dette, og at de lærer å bruke det aktivt. Samtidig er det viktig å være klar over at elevene kun får en innføring i skolen og at studentene derfor trenger repetisjon og klargjøring når de kommer til videre studier.

Utgangspunktet elevene har med seg fra skolematematikken er gitt av kompetansemålene i læreplanen. For elevene som deltar i TIMSS Advanced har matematikk vært et gjennomgående fag i hele skoleperioden – fra 1. til 13. trinn, et fag der kunnskaper og ferdigheter bygger på hverandre i stadig større kompleksitet. Dette grunnlaget skal elevene bygge videre på i sine studier. Den hierarkiske oppbyggingen av faget gjør at utfordringer som ikke løses underveis vil forplante seg. Hvis studentene har svake forkunnskaper i matematikk, vil det derfor være vanskelig å bøte på disse i videre studier.

Ulike utredninger og rapporter snakker i skrivende stund varmt om *dybdelæring* (NOU, 2015). Dybdelæring innebærer at man må *prioritere* for å få tid til å gå i dybden på *sentrale temaer*. Kombinert med en god progresjon gjennom skoleløpet knyttet til disse sentrale temaene er det rimelig å tro at økt dybdelæring vil bidra til å gi elevene et bedre grunnlag for videre studier. Et argument for dette er at overgangsproblemene elevene opplever, erfaringsmessig ikke er knyttet til hele spekteret av matematiske temaer som behandles i videregående skole. Ofte er det, som vi skal se et eksempel på i delkapittel 12.3, kompetanse innen grunnleggende temaer som *tall* og *algebra* som er mangelfull. Nettopp slike grunnleggende temaer i faget, «kjerneelementer», er framme i diskusjonen. Det gjenstår imidlertid å se om fagfornyelsen som det akkurat nå arbeides med i Norge, faktisk vil leve opp til prinsippene om dybdelæring og prioritering av fagets kjerneelementer.

12.2 Bakgrunnskunnskaper og universitetsmatematikk

I dette delkapitlet skal vi beskrive en studie som eksemplifiserer at problemer med matematikk på universitetsnivå ofte ikke skyldes manglende innlæring av det nye stoffet, men derimot manglende kompetanse vedrørende stoff som antas kjent fra videregående skole. I denne studien gjennomgår vi et knippe utvalgte oppgaver i eksamensbesvarelsene til de kandidatene som fikk karakteren F – stryk – i begynneremnet *MAT1100 – Kalkulus* ved UiO høsten 2015. Dette er det første matematikkemnet som møter studentene som begynner på realfagsstudier ved UiO, og innholdsmessig bygger emnet på matematikken elevene skal ha lært i R2. Studentene som tok eksamen høsten 2015 er typisk hentet fra populasjonen som ble testet i TIMSS Advanced våren 2015, da de var elever på R2.

Avsluttende eksamen i MAT1100 bestod av to deler: en del med flervalgsoppgaver som gav maksimalt 30 poeng og en del med åpne oppgaver som gav maksimalt 70 poeng. Studentene hadde også en midtveiseksamen som gav maksimalt 50 poeng. Midtveiseksamen telte 1/3 og avsluttende eksamen telte 2/3 ved fastsettelse av karakter. Karakteren fastsettes på bakgrunn av total skår og en helhetsvurdering i etterkant av avsluttende eksamen. Karakteren F gis normalt ved 0–39 % skår (NMR, 2003).

Høsten 2015 tok 499 kandidater avsluttende eksamen i MAT1100. Av disse fikk 98 kandidater karakteren F. Resultatene på denne eksamen var for øvrig ikke spesielt dårlige. Vi ønsket å se om vi kunne finne noen fellestrekk ved prestasjonene til strykkandidatene. Spesielt ønsket vi å undersøke om bakgrunnskunnskaper fra skolematematikken spiller inn når det gjelder stryk på introduksjonskurs på universitetsnivå. Vi gjennomgikk besvarelsene til 91 av kandidatene som fikk karakteren F på emnet som helhet. De resterende 7 besvarelsene fant vi ikke, men det er liten grunn til å tro at disse ville ha endret konklusjonene våre i nevneverdig grad.

På den første eksamensoppgaven i del 2 med åpne oppgaver kunne man oppnå maksimalt 20 poeng (se figur 12.1).

Figur 12.1 Oppgavetekst til den første oppgaven i del 2 med åpne oppgaver, eksamen MAT1100 høsten 2015.

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Finn reelle tall k og r slik at vi for alle reelle tall x har

$$x^2 + 8x + 20 = r\left[\left(\frac{x+k}{\sqrt{r}}\right)^2 + 1\right],$$

og bruk dette til å beregne integralet

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Hint: Hvis $m > 1$ er et helt tall, kan du bruke formelen

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)}\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int \frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}.$$

b) (10 poeng) Beregn integralet

$$\int \frac{x+5}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Oppgaven omhandler en antiderivasjonsteknikk som er delvis kjent for studentene fra videregående skole. En enklere variant av teknikken, som kalles delbrøkoppspalting, er et tema i læreplanen i R2. Et av kompetansemålene under temaet Funksjoner etter R2 (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon*

Eksamensoppgaven involverer også stoff som elevene lærer tidligere i skoleløpet (Matematikk 10. trinn og Matematikk 1T), og som handler om algebrakunnskaper. Et av kompetansemålene under temaet Tal og algebra etter 1T (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *rekne med rotuttrykk, potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat*

To av kompetansemålene i temaet Tal og algebra etter 10. trinn (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar*
- *behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane*

Den første delen av oppgave 11a kobler seg på disse bakgrunnskunnskapene. Oppgaven kan løses ved «å sammenlikne koeffisienter» i algebraiske uttrykk (se figur 12.2).

Figur 12.2 Løsningsforslag til første del av oppgave 11a (oppgavetekst i figur 12.1).

Løsningsforslag 11a, alternativ 1, "sammenligne koeffisienter":

$$
\begin{aligned}
& r\left[\left(\tfrac{x+k}{\sqrt{r}}\right)^2+1\right] && \text{Skriver ut potensen} \\
= \; & r\left[\tfrac{(x+k)(x+k)}{\sqrt{r}\sqrt{r}}+1\right] && \text{Ganger ut parenteser og kvadratrøtter} \\
= \; & r\left[\tfrac{x^2+2kx+k^2}{r}+1\right] && \text{Ganger inn } r \\
= \; & x^2+\underbrace{2k}_{=8}x+\underbrace{k^2+r}_{=20} && \text{Sammenligner med } x^2+8x+20
\end{aligned}
$$

Likningen $2k = 8$ gir $\underline{k = 4}$, og likningen $k^2 + r = 20$ gir dermed $\underline{r = 4}$.

Denne løsningsmetoden ligger klart innenfor dagens pensum i Matematikk 1T, og bortsett fra kvadratrottegnet ligger også selve regningen i prinsippet innenfor ungdomstrinnspensum. At studenter ved et universitetskurs for realfagstudenter ikke klarer å løse oppgaven, eksemplifiserer dermed problemet med sviktende bakgrunnskunnskaper i algebra for studenter ved denne typen kurs.

Eventuelt kan oppgave 11a løses ved å bruke teknikken «å fullføre kvadratet» (se figur 12.3).

Figur 12.3 Løsningsforslag til første del av oppgave 11a (oppgavetekst i figur 12.1).

Løsningsforslag 11a, alternativ 2, "fullføre kvadratet":

$$\begin{aligned} & x^2 + 8x + 20 \\ = \; & \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2}_{\text{fullstendig kvadrat}} - 4^2 + 20 \\ = \; & (x+4)^2 + 4 \\ = \; & 4\left[\left(\frac{x+4}{\sqrt{4}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

Så $\underline{k = 4}$ og $\underline{r = 4}$.

Dette er en noe mer «avansert» løsningsmetode, men også denne er innenfor pensum i Matematikk 1T.

Den første delen av oppgave 11a er også en hjelp for å løse resten av oppgaven, og de kandidatene som ikke får til denne delen, får lite uttelling på resten.

Gjennomsnittskåren for de 91 strykkandidatene på oppgave 11a var 0,92 poeng (av 10). Gjennomsnittlig skår som trengs for å stå på tvers av alle eksamenskomponentene, er 4 poeng av 10. Det er 18 av de 91 strykkandidatene som får det riktige svaret $r = k = 4$ (mange ad omveier), og kun 5 av disse kandidatene får mer enn 4 poeng på oppgave 11a.

Dette peker i retning av at studentene mangler dybdekunnskap om algebraiske uttrykk. Selv om elever kan utføre teknikker på konkrete talleksempler, gjør manglende dybdekunnskap at svake elever fort kan vippes av pinnen når de møter en mer generell algebraisk form (som for eksempel i det gitte hintet i oppgaven). Resultatene fra TIMSS Advanced viser (se kapitlene 8–10) at norske elever presterer svakt når de må tenke på en litt annen måte enn den de har blitt undervist i. Denne eksamensoppgaven kan virke uvant for studentene, noe som er en indikasjon på at de trenger tid og muligheter til å gå litt ulike veier og studere matematikken på ulike måter.

Oppgave 11 (se oppgavetekst i figur 12.1) illustrerer også progresjonselementet når det gjelder «stammen» Tall – Algebra – Funksjoner i skolematematikken; for å løse integraler trenger studentene tall- og algebrakunnskaper. Denne stammen er modningsstoff, og det er vanskelig å bøte på manglende forkunnskaper for de som ikke har så godt grunnlag. Et svakt grunnlag vil videre bety at studentene har mindre energi å bruke på å lære seg nytt stoff.

Resten av del 2 i oppgavesettet til avsluttende eksamen i MAT1100 høsten 2015 besto av en oppgave (Oppgave 12) med 5 deloppgaver a–e som hver ga 10 poeng. Oppgave 12 omhandlet stoff som ikke er dekket i skolematematikken, og dreide seg om et nytt tema kalt lineær algebra. Av strykkandidatene har de fleste prøvd å besvare de tre første delspørsmålene a–c på denne, men nesten ingen har prøvd på de to siste. Et fellestrekk blant strykkandidatene er at forklaringene i deloppgave a er svake. Her skal de vise at de har forstått hvordan man kan omformulere tekst til matematikk. De fleste har gitt en begrunnelse, men svært få av begrunnelsene er holdbare. Deloppgavene b og c involverer regning som omhandler nye begreper introdusert i MAT1100, og disse er det flere av strykkandidatene som skårer mange poeng på. Dette nye stoffet forutsetter ikke modning i like stor grad som annet stoff i oppgavene.

Gjennomsnittsskåren på de tre punktene a–c om nytt stoff (der hvert punkt ga maksimalt 10 poeng) for våre 91 strykkandidater er henholdsvis 1,3, 4,0 og 4,6. Dette gir at gjennomsnittet på de tre delpunktene som omhandler stoff som ikke er dekket i skolematematikken, er 3,3 poeng. Dette er mer enn det tredobbelte av skåren på «algebrapunktet» i oppgave 11a. Så på det nye stoffet er *gjennomsnittlig skår* hos de 91 strykkandidatene nesten oppe på det nivået som kreves for å stå.

Konklusjonen er at strykkandidatene gjør det spesielt svakt på eksamensoppgaven som omhandler algebrastoff som er dekket i skolematematikken.

Studien vi beskriver her er liten, og den gir naturligvis bare et eksempel på et fenomen. Likevel illustrerer den godt det mange har erfart vedrørende begynnerkurs i matematikk på UH-nivå: Sviktende bakgrunnskunnskaper, særlig innen fagområdet algebra, er et problem. Forkunnskapstesten til Norsk matematikkråd (NMR, 2015) bekrefter dette. Fordi sviktende forståelse for et fagområde lett kan bli skjult av instrumentell innlæring av strategier for å løse oppgaver i de sjangrene elevene er vant med, er måling av kunnskaper gjennom alternative systemer av oppgavesjangre, som for eksempel de man finner i TIMSS Advanced, av stor verdi. Med slike oppgaver har man også fordelen internasjonal sammenlikning kan gi. I neste delkapittel skal vi analysere elevprestasjoner på konkrete oppgaver fra TIMSS Advanced i et universitets- og høgskoleperspektiv.

12.3 Noen UH-relevante oppgaver fra TIMSS Advanced

Som nevnt i forrige delkapittel viser TIMSS Advanced 2015 generell framgang for norske elever innen oppgavetyper som ligger nær dem elevene er vant til. Se også kapittel 8–10. Elevene framstår som dårligere forberedt når de møter uvante problemstillinger, dvs. problemer der de må tenke på en litt annen måte enn den de har blitt undervist i. Denne typen overføringsproblemer kan skape hindringer når elevene går videre til UH-nivå. Det å kunne tenke fleksibelt og løse mange ulike typer problemer er en kompetanse som vil hjelpe elevene i videre studier. Næringslivet etterspør også kandidater som kan tenke selv og «håndtere kaos». I denne sammenhengen er det relevant å måle elevers kompetanse i matematikk ved å bruke oppgaver og oppgavesjangre som ikke nødvendigvis samsvarer med de formatene elevene er vant med. Her representerer TIMSS Advanced et godt verktøy.

I dette delkapitlet vil vi bygge videre på den systematiske gjennomgangen av oppgavene fra TIMSS Advanced 2015 som er gjort tidligere i denne boken (kapittel 8, 9 og 10) og se litt nærmere på et utvalg av oppgaver som er spesielt relevante fra UH-perspektivet. Vi vil koble dette opp mot oppgaver på UH-nivå og erfaringer vi har fra å undervise begynnerstudenter i matematikk. Spesielt vil vi ta for oss begrepene *derivasjon*, *grenseverdi*, *kontinuitet* og *absoluttverdi*. Oppgavene vil ha samme navn og nummerering som i kapittel 8-10.

Hvis vi ser på «stammen» av hovedområder Tall – Algebra – Funksjoner og progresjonen i denne gjennom skolematematikken, ser vi at den på mange måter munner ut i temaet differensiallikninger i R2 (KD, 2006). Algebrakunnskaper gjør at man får større forståelse av tall, og ved å jobbe med funksjoner får man større dybdekunnskap og forståelse av algebra. Slik er det også innenfor hovedområdene i denne «stammen»: Innen temaet funksjoner vil differensiallikninger gjøre at man får en større dybde og forståelse innenfor temaene derivasjon og integrasjon.

Vi vil i dette delkapitlet primært konsentrere oss om oppgavene innenfor emneområdet *Kalkulus* i TIMSS Advanced (se kapittel 9). Grunnen er at mange av disse oppgavene relaterer seg til de øvre delene av den sentrale «stammen» nevnt i forrige avsnitt, og at de derfor måler hvilken progresjon elevene har hatt eller ikke har hatt i matematikken. Vi vil for eksempel også kunne kommentere elevenes kunnskaper innen algebra ut fra disse oppgavene.

Kalkulus er også en sentral del av matematikken som de fleste begynnerkurs i matematikk på universiteter og høgskoler bygger videre på.

Det første fagtemaet vi skal fokusere på, er *derivasjon*. Resultatene fra flere av kalkulusoppgavene i TIMSS Advanced indikerer en positiv utvikling blant norske elever innen dette temaet. I kalkulusoppgave 1 (se figur 12.4) skulle elevene derivere et uttrykk. I 2008 svarte 57 % av de norske elevene riktig (svaralternativ C) på denne oppgaven, i 2015 var det 73 %.

Figur 12.4 Kalkulusoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015 og 2008.

Funksjonen f er definert ved $f(x) = e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

Ⓐ e^{x^2}

Ⓑ e^{2x}

Ⓒ $2xe^{x^2}$

Ⓓ $e^{x^2} + 2x$

Ⓔ $2e^{2x^3}$

Faktisk er dette den oppgaven der norske elever viser størst framgang fra 2008 til 2015 når vi korrigerer for endring i internasjonalt snitt. Oppgaven krever bruk av kjerneregelen for derivasjon, noe elevene lærer i Matematikk R1. Elevene får videre bruk for å kunne anvende kjerneregelen *baklengs* i R2 både når de skal antiderivere/integrere og når de skal løse differensiallikninger. Dette gjør at elevene får vedlikeholdt kunnskapen, og at den tilføres dybde. «Vi blir sjelden trygge på egne ferdigheter hvis vi ikke får brukt dem gjentatte ganger i mer komplekse og sammensatte situasjoner» (Borge et al., 2014).

Kalkulusoppgave 1 er også et eksempel på en TIMSS Advanced-oppgave som ligger svært nær oppgavesjangre i begynnerkurs på UH-nivå. Til midtveiseksamen i emnet MAT1100 ved UiO høstsemesteret 2013 ble følgende oppgave gitt:

La $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = e^{x^2}$ for alle x. Da er den annenderiverte av f gitt ved

A) $f''(x) = (2x)^2 e^{x^2}$
B) $f''(x) = e^{x^2}$
C) $f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$
D) $f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}$
E) $f''(x) = 2xe^{x^2}$

Vi ser her at funksjonen som skal deriveres, er den samme som i TIMSS Advanced-oppgaven. Forskjellen ligger dels i den noe mer formelle notasjonen som brukes i UH-oppgaven, og dels i at UH-oppgaven etterspør den andrederiverte. Rent teknisk er kompetansen som kreves for å finne den andrederiverte av denne funksjonen, essensielt den samme som kreves for å finne den førstederiverte f'. At innholdet i denne MAT1100-oppgaven vurderes som noe det er relevant å teste i en UH-eksamen, viser tydelig relevansen av TIMSS Advanced i et UH-perspektiv.

I en annen oppgave (se kalkulusoppgave 3, kapittel 9) fra TIMSS Advanced 2015 skulle elevene dobbeltderivere uttrykket $x^2 + (1/x)$. Også her var det klar framgang i Norge: 21 % av elevene svarte riktig i 2008 og 42 % svarte riktig i 2015 $(2 + (2/x^3))$. I denne oppgaven kan elevene ha fordel av algebraiske manipulasjoner underveis.

Et relatert eksempel finner vi i kalkulusoppgave 4, kapittel 9 som også omhandler derivasjon. Her skulle elevene tegne fortegnsskjema for $f'(x)$ ut fra grafen til f. Her svarte 73 % av de norske elevene riktig i 2015, mens 53 % svarte riktig i 2008. Det er tydelig at elevene har fått jobbe med ulike representasjoner av begrepet derivasjon og det å se sammenhenger, to strategier som forskning viser er god undervisningspraksis (NCTM, 2014). Generelt vil forståelse som er robust med hensyn til variasjon av innfallsvinkel utgjøre et godt grunnlag for videre progresjon. Dette er sentralt i relasjon til videre studier, der man forventer at skolematematikken sitter og man har begrenset tid til å bruke på repetisjon.

Ut fra resultatene på kalkulusoppgave 1 (figur 12.4) kan det se ut til at de norske elevene mestrer bruk av den såkalte kjerneregelen. Ser vi imidlertid på en annen derivasjonsoppgave fra TIMSS Advanced 2015 (se figur 12.5), der elevene også skulle bruke kjerneregelen, er det kun 39 % av de norske elevene som svarte riktig (svaralternativ B). De resterende 61 % av svarene fordelte seg ganske likt på de tre feilsvarene. Sammenlikner vi oppgaven i figur 12.5 med oppgaven i figur 12.4, er én åpenbar forskjell at oppgaven i figur 12.5 inneholder en uspesifisert funksjon, nemlig kjernefunksjonen h. Dersom elevene har en forståelse for kjerneregelen slik den kan formuleres generelt, for eksempel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{gir} \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x),$$

så burde ikke oppgaven i figur 12.5 by på vesentlig større utfordringer enn den i figur 12.4. De langt svakere norske resultatene på oppgaven i figur 12.5 indikerer derfor at en del elevers forståelse av kjerneregelen er knyttet til hvordan man kan *anvende* kjerneregelen på en del kjente funksjoner, uten at de nødvendigvis har en forståelse for hvordan den kan formuleres generelt. Dette indikerer en svakhet hos populasjonen testet i TIMSS Advanced knyttet til forståelse av formell matematisk syntaks, en type forståelse som blir mer avgjørende på UH-nivå.

Figur 12.5 Kalkulusoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015.

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

Ⓐ $2\sin(h(x))h'(x)$

Ⓑ $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

Ⓒ $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

Ⓓ $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

Når det gjelder begrepet *grenseverdi*, kan vi spore et norsk progresjonsproblem i prestasjonsdataene fra TIMSS Advanced. Etter hovedområdet Funksjoner i Matematikk 1T skal elevene blant annet kunne *gjere greie for definisjonen av den deriverte* (KD, 2006). Denne utgreiingen bygger på begrepet grenseverdi. Et av kompetansemålene i Funksjoner etter Matematikk R1 (KD, 2006) er at elevene skal kunne

- *gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare*

Grenseverdi defineres ikke i detalj (formelt) i skolematematikken, men man jobber med begrepet ut fra en intuitiv forståelse av at det er «en verdi vi nærmer oss / går mot».

Relatert til begrepet grenseverdi er begrepet *kontinuitet*. Elevene skal også kunne gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige. I kalkulusoppgave 10 i TIMSS Advanced 2015 (figur 12.6) skulle elevene avgjøre om en funksjon er kontinuerlig i et punkt og gi en begrunnelse.

Figur 12.6 Kalkulusoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

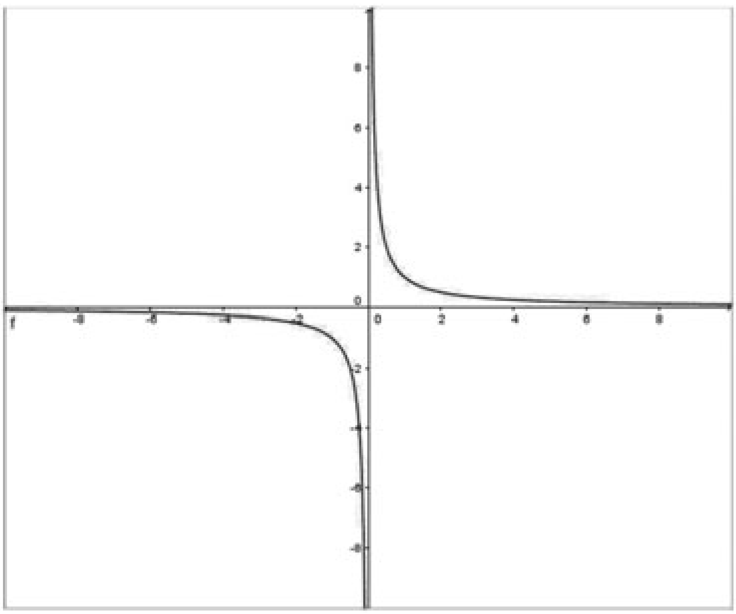
Begrunn svaret.

Det krevdes ikke et formelt svar i denne oppgaven – det var for eksempel nok å tegne graf og påpeke at punktet $(1, 1)$ ikke ligger på linjen gitt ved $y = 2x$, eventuelt å si at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1 er lik 2, som ikke er lik $f(1)$. Det var kun 8 % av de norske elevene som fikk riktig svar på denne oppgaven. Dette kan være fordi elevene møter få eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige og videre at det arbeides lite med slike problemstillinger. Uansett gir dette et svakt utgangspunkt for studier på UH-nivå.

Vi ser at kontinuitet er et begrep begynnerstudentene sliter med. Spesielt de elevene som skal ta et matematikktungt studium vil møte en presis definisjon av begrepet grenseverdi, som er helt sentralt i studiet av funksjoner. Det vil være til stor hjelp for elevene å finne måter å snakke om dette begrepet på slik at det blir lettere når de fortsetter sine matematikkstudier; det vil for eksempel være nyttig å gjenta og problematisere hva det vil si «å være nærme noe» – «når er vi nærme nok?». Elevene i programfag vil generelt tjene mye på å få gode uformelle gjengivelser av de presise definisjonene av begrepene nevnt i læreplanen. Generelt vil en mangel på definisjoner gjøre det vanskelig å jobbe på en «matematisk god måte».

La oss ta et eksempel: Slik begynnerstudenter på universiteter og høgskoler gjerne møter teorien for kontinuerlige funksjoner, vil funksjonen f gitt ved $f(x) = 1/x$ være kontinuerlig (vi har tegnet grafen i figur 12.7). Dette kommer ofte som en overraskelse på studentene, da veldig mange har jobbet med en intuitiv forståelse av at en kontinuerlig funksjon er en funksjon med en sammenhengende graf. Tanken bak begrepet kontinuitet er at man i hvert punkt a skal kunne få funksjonsverdiene $f(x)$ til å bli så nær funksjonsverdien $f(a)$ man vil, bare x er nær nok a. Dette kan man knytte til grafen av $1/x$: For å snakke om at vi er nærme nok, må vi bruke punkter i definisjonsmengden til funksjonen, og dermed kan man poengtere at vi kun kan snakke om kontinuitet i de punktene som er med i definisjonsmengden (noe som gjør at $f(x) = 1/x$ er kontinuerlig).

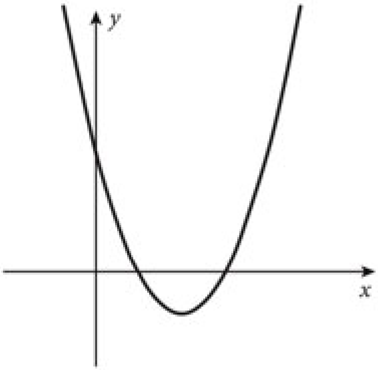
Figur 12.7 Grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 1/x$ for x i intervallet $[-10, 10]$.



En annen grunn til at oppgaven i figur 12.6 om kontinuitet har falt veldig vanskelig kan være at elevene heller ikke har jobbet så mye med funksjoner med såkalt delt forskrift. Det vanligste eksempelet på en slik funksjon er absoluttverdifunksjonen. Den dukker opp i en algebraoppgave i TIMSS Advanced, og da i form av en grafisk framstilling (se figur 12.8).

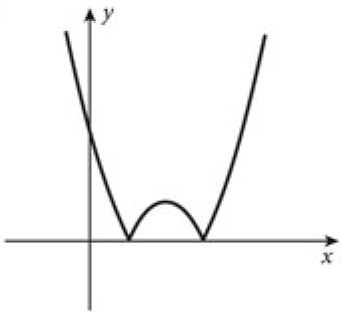
Figur 12.8 Algebraoppgave 8 i TIMSS Advanced 2015.

Grafen til $y = f(x)$ er vist her.

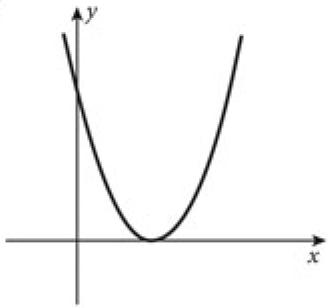


Hvilken av følgende grafer viser $y = |f(x)|$?

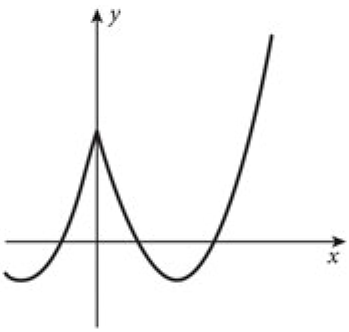
(A)



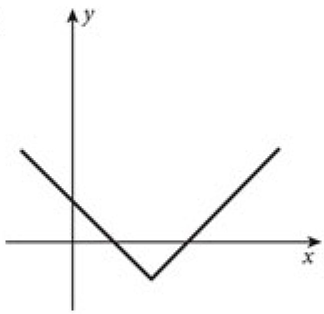
(B)



(C)



(D)



På denne oppgaven svarte 55 % av de norske elevene riktig (svaralternativ A). Det skal også nevnes at over 80 % av elevene ga et svar der grafen ligger over x-aksen (svaralternativ A eller B). Og her kommer et annet perspektiv inn: Absoluttverdi er et begrep som ikke eksplisitt nevnes i læreplanen, men som naturlig hører inn, blant annet som et eksempel på en funksjon som ikke er deriverbar i alle punkter. I typiske universitetskurs er deriverbarhet sentralt, og forståelse for absoluttverdi gir tilgang til mange gode eksempler i denne sammenhengen. Absoluttverdi er også viktig i forbindelse med presise definisjoner av grensebegreper og bruk av disse definisjonene, noe som er sentralt og vanskelig teoristoff i mange UH-begynnerkurs. Har ikke elevene med seg en robust forståelse for begrepet absoluttverdi fra videregående skole, blir progresjonen knyttet til denne typen stoff i UH-kursene meget bratt. Dette er et eksempel på et systemproblem som har å gjøre med overgangen til videre studier. Det oppstår en form for ansvarspulverisering, fordi det er visse matematiske temaer som ikke dekkes på en adekvat måte verken i skolen eller i UH-sektoren.

Eksemplet med absoluttverdi illustrerer viktigheten av forkunnskapene elevene har fra skolen. Mye av dette stoffet trenger tid for å modnes – derfor er det viktig med prioritering og progresjon – og i de nye UH-emnene som elevene møter, rekker man ikke å bøte på for mange hull; til det går tiden for fort, og studentene skal helst bruke energien på videre progresjon. Jamfør diskusjonen om ujevn progresjon i delkapittel 5.3. I et slikt lys kan noen av resultatene fra TIMSS Advanced være foruroligende.

Et fellestrekk for mange av disse foruroligende resultatene er «uvante problemstillinger». I algebraoppgave 14 (figur 12.9) svarte 11 % av de norske elevene riktig ($x = 0$ og $x = 10^{12}a$).

Figur 12.9 Algebraoppgave 14 fra TIMSS Advanced 2015.

La a være en konstant ulik 0. Finn de to x-verdiene der grafene til $y = 10^6 ax$ og $y = \frac{x^2}{10^6}$ skjærer hverandre.

Svar: ______________________________

Dette er en uvant oppgave i den forstand at det er mange begreper som kombineres: parametere, tierpotenser og brøker. Flere vil nok få til denne oppgaven når de har fått mer trening, men selve stoffet oppgaven omhandler vil ikke gjennomgås på nytt senere, og vi gjentar gjerne at dette er et foruroligende resultat. Det kan for eksempel virke som om elevene er uvante med at parametere kan dukke opp i svaret.

Vi tar med et eksempel til på en uvant oppgave som elevene vil ha stort utbytte av å kunne svare riktig på. Algebraoppgaven fra TIMSS Advanced i figur 12.10 omhandler den såkalte konjugatsetningen. Her svarte 23 % av norske elever riktig (svaralternativ A). Igjen kan vi bruke ordet «uvant» om oppgaven, men oppgaven omhandler et tema man har hatt god tid til å jobbe med i skolematematikken (se også kapittel 11). Å kunne omforme formler på en effektiv måte er en grunnleggende matematisk ferdighet og et nødvendig grunnlag for videre studier.

Figur 12.10 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x - y}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

Vi avslutter med en av oppgavene fra TIMSS Advanced der norske elever har størst framgang – når vi ser bort fra oppgaver innen derivasjon. Det er en algebraoppgave, og elevene skal finne feil i en løsning av en logaritmelikning (se figur 12.11). Her svarte 43 % av norske R2-elever riktig i 2015, mens 24 % av 3MX-elevene svarte riktig i 2008. Riktig svar er å påpeke at overgangen mellom linje 1 og 2 ikke stemmer («det er ikke slik vi regner med logaritmer»). Dette er oppgave som skiller seg fra tradisjonelle oppgavesjangre i norsk videregående skole. Her kan fokus på diskusjon og refleksjon i undervisningen ha hjulpet elevene. I videre studier er man også opptatt av at studentene skal diskutere og jobbe muntlig med matematikk.

Figur 12.11 Algebraoppgave 7 fra TIMSS Advanced 2015.

Carl vil løyse likninga $\ln(2x-1)=0$. Løysingsforsøket hans er vist nedanfor, men inneheld ein feil.

$$\begin{aligned}
&\ln(2x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x-\ln 1=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x-0=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &2x=1\\
\Leftrightarrow\ &x=0{,}5
\end{aligned}$$

Kva for ein feil gjorde Carl?

12.4 Oppsummering og avsluttende kommentarer

Mens resultatene fra eksempelstudien i delkapittel 12.2 indikerer betydningen av manglende forkunnskaper i matematikk ved overgangen til UH-nivå, illustrerer oppgavene i delkapittel 12.3 nærheten mellom matematikkompetanse slik denne måles i TIMSS Advanced og læringsmål ved begynnerkurs i matematikk på UH-nivå. Vi ser at det kan være relevant for arbeid med matematikk på UH-nivå å studere resultater fra TIMSS Advanced. Nærheten mellom TIMSS Advanced matematikk og typiske UH-begynnerkurs i matematikk er, etter vår vurdering, så stor at det ville være av interesse å måle UH-studentenes kompetanse ved bruk av TIMSS Advanced. Faktisk benyttet den norske gruppen for TIMSS Advanced 2015 en gruppe studenter fra kurset vi har brukt som eksempel i dette kapitlet, MAT1100 ved MN, UiO, i en pre-pilotering av visse oppgaver forut for pilotundersøkelsen i 2014, som igjen lå til grunn for selve gjennomføringen av TIMSS Advanced i 2015. At dette gir mening, illustrerer igjen nærheten mellom TIMSS Advanced og denne typen UH-kurs. Mange aspekter som kommer fram i resultatene i TIMSS Advanced stemmer overens med resultater fra Norsk matematikkråds forkunnskapstest (NMR, 2015).

Mange studenter erfarer at overgangen fra skole til videre studier er stor, spesielt når det gjelder matematikk. De ulike institusjonene innen høyere utdanning arrangerer gjerne ulike former for forkurs og støttekurs, og det gis studietips til de nye studentene (Borge, Johansen & Seland, 2016). Elevenes prestasjoner i TIMSS Advanced gir verdifull informasjon om hva norske elever har av matematisk kunnskap etter 13 års skolegang og om hvilke forkunnskaper studentene som starter på ulike universitets- og høgskolestudier sitter inne med.