KAPITTEL 9

Oppgaver i kalkulus fra TIMSS Advanced 2015

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Siren Røst Veflingstad
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Tor Espen Hagen
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet kalkulus i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapitlet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og for «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

Norge	10,6 %	18,7 år
Sverige	14,1 %	18,7 år
USA	11,4 %	18,1 år
Russland	10,1 %	17,7 år
Slovenia	34,4 %	18,8 år
Frankrike	21,5 %	18,0 år
Portugal	28,5 %	18,1 år

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i kalkulus, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

Kalkulusoppgave 1
Knowing, Derivative of exponential function

Funksjonen f er definert ved $f(x) = e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

Ⓐ e^{x^2}

Ⓑ e^{2x}

Ⓒ $2xe^{x^2}$

Ⓓ $e^{x^2} + 2x$

Ⓔ $2e^{2x^3}$

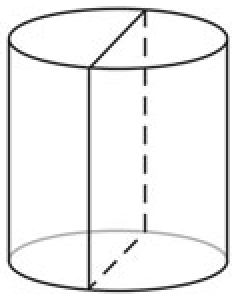
MA13015		A	B	C*	D	E	Ikke svart
Norge	1998	8	13	66	10	1	2
	2008	11	17	57	10	3	2
	2015	7	8	73	7	1	4
Sverige		16	15	48	10	5	6
USA		7	10	71	8	2	2
Russland		12	14	62	10	2	1
Slovenia		18	13	44	20	4	1
Frankrike		6	9	80	2	2	2
Portugal		6	14	65	7	3	5
Int. gj.snitt		9	11	66	8	3	4

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som det å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste om elevene vet hvordan de skal bruke kjerneregelen for å derivere en eksponentialfunksjon. Det var en klar tilbakegang fra 1998 til 2008 i de norske elevenes prestasjoner på denne oppgaven, mens det er en vel så stor framgang i prestasjoner fra 2008 til 2015. De norske elevenes prestasjoner i 2015 er litt over det de presterte i 1998, og nesten på topp sammenliknet med andre land. Det er bare Frankrike som har en større andel som svarer riktig på oppgaven.

Oppgaven har en relativt høy løsningsfrekvens i de fleste landene. Sverige og Slovenia er de to landene som presterer svakest. Tar vi Slovenias høye dekningsgrad med i vurderingen, hvor godt over 30 % av årskullet tar matematikk til topps, er det Sverige som kommer svakest ut.

Det er flere mulige årsaker til den positive utviklingen i norske elevers prestasjoner fra 2008 til 2015. Derivasjon og derivasjonsregler er sentralt stoff i R1. Det videreføres i R2 med derivasjon av trigonometriske funksjoner og sammensatte funksjoner. Elevene studerer dempede og udempede svingefenomener og får bruk for både integrasjon og derivasjon i forbindelse med løsning av differensiallikninger. En mulig årsak til de bedre resultatene hos norske elever kan være at både første og andre ordens differensiallikninger har en stor plass i læreplanen i R2. For å løse slike likninger må elevene være fortrolige med både derivasjon og integrasjon. Differensiallikninger krever spesielt kunnskap om derivasjon av eksponentialfunksjoner og kjerneregelen (integrerende faktor), nettopp det de trenger for å løse denne oppgaven.

Kalkulusoppgave 2
Applying, Cylinder radius with max volume



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

Ⓐ 2,5 m

Ⓑ 2 m

Ⓒ 1,5 m

Ⓓ 1 m

Ⓔ 0,5 m

MA13016		A	B	C	D*	E	Ikke svart
Norge	1998	11	16	12	34	22	4
	2008	10	18	13	34	21	3
	2015	10	19	16	28	19	9
Sverige		10	20	15	31	13	10
USA		10	15	20	31	21	3
Russland		8	14	14	45	15	3
Slovenia		9	14	15	35	20	6
Frankrike		13	22	17	25	14	10
Portugal		7	12	15	28	29	9
Int. gj.snitt		10	16	16	30	18	10

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som anvendelse. Oppgaven skal teste hvor gode elevene er til å anvende kunnskaper om funksjoner og optimalisering til å lage en matematisk modell som de kan bruke til å finne det maksimale volumet av sylinderen. Oppgaven kan løses ved å sette opp et funksjonsuttrykk for volumet uttrykt ved radius og høyde i sylinderen. Man kan så bruke høyde og radius i sylinderen til å sette opp et uttrykk for omkretsen av snittflata, $O = 4r + 2h$, som det er oppgitt skal være 6 m. Da kan $h = 3 - 2r$ settes inn i funksjonsuttrykket for volumet, som blir $V(r) = \pi r^2(3 - 2r) = \pi(3r^2 - 2r^3)$. Dette funksjonsuttrykket kan man derivere med hensyn på radius. Så settes uttrykket for den deriverte lik 0 for å finne verdier for radius som kan gi maksimum eller minimum volum av sylinderen. Med korrekte utregninger får man at radius lik 1 m gir sylinderen maksimalt volum.

Dette er en relativt komplisert oppgave, som må løses i flere trinn. De elevene som løser oppgaven riktig, viser kompetanse på et høyt nivå. Oppgaven faller vanskelig i de fleste landene, med en løsningsfrekvens rundt 30 %, unntatt i Russland hvor det er 45 % som svarer rett. Resultatet for norske elever var stabilt fra 1998 til 2008, mens vi ser noe tilbakegang i 2015. En mulig årsak til denne tilbakegangen er at modellering var mer i fokus i den læreplanen elevene hadde i 2008 enn i den elevene nå arbeider etter. En annen mulig årsak kan være at optimalisering er mer sentralt i R1 og S1 enn i R2, men vi har sett framgang på andre oppgaver med stoff som elevene arbeider mest med i R1. Det er derfor lite trolig at det er den viktigste årsaken til tilbakegangen.

Feilsvarene er relativt jevnt fordelt, både i Norge og i de andre landene. Det er derfor vanskelig å peke på en typisk misoppfatning hos elevene. Noen elever som har greid å løse oppgaven riktig, kan likevel ha valgt alternativ B fordi de har tenkt diameter i stedet for radius. Svaralternativ A, B, og C kan man utelukke ved et logisk resonnement, siden summen av diametrene i disse alternativene blir større eller lik den oppgitte omkretsen på 6 m. Det kan allikevel tenkes at noen av de som har svart alternativ C, altså 1,5 m, har tenkt at rektangler har størst areal hvis de er kvadrater, og at de har tenkt diameter istedenfor radius.

Kalkulusoppgave 3
Knowing, Second derivative of function given

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Kva er $f''(x)$?

MA23154		20 Helt riktig	10 Bare $f'(x)$	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	2008	21	9	62	8
	2015	42	13	41	4
Sverige		43	13	38	7
USA		52	11	34	3
Russland		43	4	32	20
Slovenia		34	13	46	7
Frankrike		33	12	51	4
Portugal		39	20	36	5
Int. gj.snitt		43	13	37	7

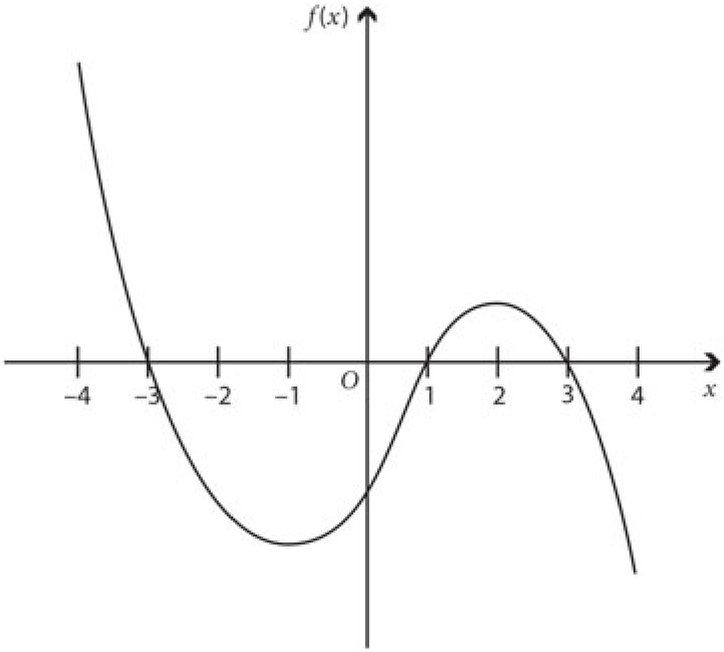
Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene greier å finne den dobbeltderiverte av en gitt funksjon. Riktig svar på oppgaven gir elevene kode 20, mens de som har funnet den første deriverte, men ikke den andrederiverte, har fått kode 10. Det riktige svaret er $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$ (eller et ekvivalent uttrykk).

Det er en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner på denne oppgaven fra 2008, med en dobbelt så stor andel av elevene som får den til i 2015. Dette resultatet samsvarer med hva vi har sett på andre oppgaver i derivasjon; norske elever har blitt markant bedre på dette området. To mulige grunner til denne framgangen peker seg ut. Den ene er at derivasjon er stoff elevene jobber med i både R1 og R2. I 2008 var det ikke vanlig å teste elevene på prøver og til eksamen på stoff fra lavere trinn, mens det har blitt gjort i langt større grad senere. Det ser ut til å ha ført til at man i skolen nå legger mer vekt på vedlikehold og videreutvikling av ferdigheter, som for eksempel derivasjon, som testes i denne oppgaven. I et fag som matematikk er det viktig med vedlikehold av tidligere innlært kunnskap, siden faget er hierarkisk bygget opp, ny kunnskap skal bygge på det du kan fra før. I norsk læreplan er derivasjon sentralt i R1, mens både derivasjon og integrasjon er sentralt i R2. Samtidig er det en forutsetning for å lære integrasjon som antiderivasjon at man behersker derivasjon. Vedlikehold av kunnskaper fra lavere trinn er derfor essensielt i matematikk, mer enn i mange andre fag.

En annen grunn til den tydelige framgangen man har sett hos norske elever når det gjelder derivasjon, kan knyttes til en viktig endring i læreplanen for R2 etter 2008, ved at differensiallikninger ble tatt inn i læreplanen. Arbeid med differensiallikninger forutsetter at elevene har gode ferdigheter i og forståelse av både derivasjon og integrasjon. Hvis de ikke har fått det helt med seg fra R1, får de masse trening og befesting av denne kunnskapen i løpet av R2. Det er derfor interessant at vi ser en systematisk framgang hos norske elever når det gjelder derivasjon, slik som i denne oppgaven.

Norge, Sverige og Russland ligger omtrent på det internasjonale gjennomsnittet for rett svar, og USA et stykke over dette snittet. Det er en mindre andel av elevene i Frankrike og Slovenia som får til denne oppgaven, men her må man huske at de har en langt høyere dekningsgrad enn vårt land. Det norske resultatet er uansett positivt, og ikke minst er det interessant å se at endringer i læreplan og hva som vektlegges til eksamen, ser ut til å bidra til at elevene får bedre kunnskaper på sentrale fagområder som de vil trenge i mange videre utdanninger og yrker.

Kalkulusoppgave 4
Reasoning, Sign of derivative function



Studer grafen til funksjonen f som er vist ovanfor. Kva for eit diagram viser rett forteikn for den deriverte funksjonen $f'(x)$?

Ⓐ
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ ++++++0−−−−−−−−−−−−−−0++++++++0−−−−−

Ⓑ
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ +++++++++++++++++++++0−−−−−−−−−−−−−

Ⓒ
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ +++++++++++++++0−−−−−−−−−−0++++++++++

Ⓓ
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ −−−−−−−−−−−−−0++++++++++++0−−−−−−−−−

MA23206		A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	2008	28	8	8	53	2
	2015	15	4	6	73	2
Sverige		12	6	9	71	3
USA		17	6	7	65	5
Russland		21	2	7	69	2
Slovenia		37	5	12	43	4
Frankrike		27	1	3	67	2
Portugal		20	1	8	70	2
Int. gj.snitt		23	3	7	64	3

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal ved å se på grafen til f resonnere seg fram til fortegnet til den deriverte funksjonen. Funksjonen er synkende fram til -1, det gir negativt fortegn på den deriverte. Funksjonen er stigende derfra til $+2$, det vil si at den deriverte er positiv. Etter det er funksjonen synkende, da er den deriverte igjen negativ. Det betyr at det er alternativ D som gir det riktige svaret.

Det norske resultatet på denne oppgaven er veldig bra, bedre enn alle de landene vi sammenlikner med. Det er også en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner fra 2008 til 2015. Det legges stor vekt på å forstå sammenhengen mellom grafen til funksjonen og grafen til den førstederiverte både i lærebøkene og på eksamen i Norge. Det legges også vekt på sammenhengen mellom fortegnsskjema og graf. Andelen elever som løser oppgaven, er 20 prosentpoeng høyere i 2015 enn i 2008. Det er flere mulige årsaker til denne framgangen. I de reviderte læreplanene er koblingen mot fysikk blitt tydeligere, for eksempel ved å knytte derivasjon til fysiske begreper som fart og akselerasjon, og det kan ha bidratt til å styrke forståelsen for den deriverte og den dobbeltderiverte. Her kan også bruk av graftegner ha en positiv virkning, siden elevene raskt kan tegne inn grafene til en funksjon og den deriverte funksjonen i samme koordinatsystem, og diskutere sammenhenger mellom dem.

Igjen bekreftes det at norske elever gjør det bedre i 2015 enn i 2008 på området derivasjon. Fortsatt jobber elevene mer med derivasjon i R1 enn i R2, men både mer aksept etter 2008 for å teste elevene i stoff fra lavere trinn, og mer vekt på vedlikehold av tidligere innlærte ferdigheter, kan ha bidratt til den positive utviklingen vi ser i flere oppgaver. Det kan også ha hatt en positiv effekt at differensiallikninger nå har blitt en del av læreplanen i R2, noe som forutsetter at elevene har god forståelse av både derivasjon og integrasjon.

Portugal og Frankrike har også gode resultater på denne oppgaven, særlig når vi tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden i disse landene.

Kalkulusoppgave 5
Applying, Units of commodity to max profit

Ei bedrift produserer x einingar av ei vare kvar dag. Kostnadene i zed ved produksjon av x einingar er gitt ved $K(x) = 0{,}45x^2 + 40x + 2000$. Vara blir seld for 220 zed per eining. Kor mange einingar må produserast og seljast dagleg for å gi maksimalt overskot?

Vis framgangsmåten.

MA23166		10 Riktig løsning	11 Riktig løsning med kalkulator	70 Riktig metode, men regnefeil	72 Bruk av kalkulator, men feil løsning	79 Andre feil	Ikke svart
Norge	2008	7	4	1	**8**	44	36
	2015	10	1	2	**3**	45	39
Sverige		11	2	1	**2**	59	26
USA		12	4	7	**9**	55	13
Russland		12	0	0	**0**	34	53
Slovenia		5	0	0	**0**	68	27
Frankrike		8	2	1	**4**	52	33
Portugal		5	2	1	**1**	61	30
Int. gj.snitt		8	1	1	**2**	51	36

Dette er en åpen kalkulusoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse. Oppgaven var vanskelig for elever i alle land, og det internasjonale gjennomsnittet for rett svar er under 10 %. Elevene må først skjønne at inntekten er $220x$, for deretter å sette opp et funksjonsuttrykk for overskuddet, $O = 220x - (0{,}045x^2 + 40x + 2000)$, basert på opplysningene i teksten. Denne funksjonen kan så deriveres, før den deriverte settes lik 0 for å finne maksimumsverdien som er 200 enheter. På denne oppgaven skulle elevene vise framgangsmåten, og vi har derfor noe informasjon om hvordan de løste den.

Elevene fikk kode 10 hvis svar og framgangsmåte var riktig, mens kode 11 var for de som hadde brukt kalkulator til utregningene med en akseptabel beskrivelse av hvordan den var brukt. Kode 70 var for elever som hadde brukt en riktig metode, men med en regnefeil. Kode 72 var for de som hadde brukt kalkulator, men ikke hadde en tilfredsstillende forklaring på bruken, eller at svaret de ga var feil. Som det framgår av tabellen, var det få av de som fikk rett på oppgaven, som hadde brukt kalkulator, mens det var en litt større andel av de som gjorde en feil i løsningen av oppgaven, som hadde brukt kalkulator.

USA presterte best med 16 % som løste oppgaven. Norge ligger litt over det internasjonale gjennomsnittet, og har en litt høyere prosent rett i 2015 enn i 2008. Men her må vi ta forbehold om at verdiene gjennomgående er så lave at det er vanskelig å trekke noen sikre konklusjoner. I alle land er det en betydelig andel av elevene som ikke har svart på oppgaven, i Norge nærmere 40 %.

Som for kalkulusoppgave 2 er det antakelig modelleringsdelen elevene finner problematisk. Dette er en typisk modelleringsoppgave som det arbeides med i S1 og S2, men ikke i R-kursene. Vi ser at elevene har problemer med begge disse oppgavene. Det å tenke i flere trinn er også noe som vanligvis er krevende. De må her selv finne ut hvordan de skal uttrykke inntektsfunksjonen og som neste trinn overskuddsfunksjonen. I begge disse oppgavene ser vi at norske elever sliter vel så mye som elever i en del andre land.

Kalkulusoppgave 6
Applying, Area enclosed by graphs of functions

Kor stort er arealet som er avgrensa av grafane til funksjonane $y = x^2$ og $y = 5x - 4$?

Vis framgangsmåten.

MA23043		20 Helt riktig	21 Riktig med kalkulator	10 Riktig metode, men regnefeil	79 Feil løsning	Ikke svart
Norge	2008	7	13	6	28	46
	2015	16	4	10	31	38
Sverige		16	6	7	39	32
USA		24	14	15	36	11
Russland		16	0	5	34	45
Slovenia		15	0	17	55	13
Frankrike		5	2	4	40	47
Portugal		0	1	0	48	52
Int. gj.snitt		13	3	9	40	35

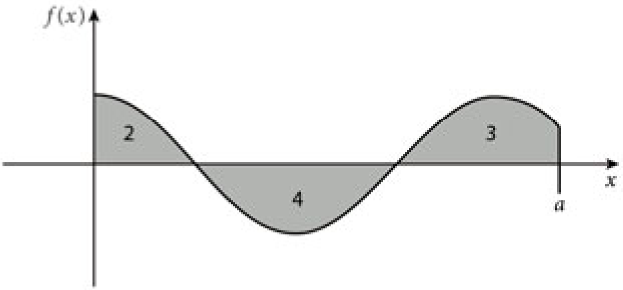
Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Elevene skal beregne arealet som er avgrenset av grafene til de to funksjonene som er oppgitt i oppgaven. Elevene må finne koordinatene til skjæringspunktene $(1, 1)$ og $(4, 16)$ mellom grafene og avgjøre at funksjonen $y = 5x - 4$ har størst funksjonsverdier i integrasjonsområdet. Det riktige svaret får man så ved å finne det bestemte integralet for differansen mellom de to funksjonene fra $x = 1$ til $x = 4$, altså $\int_1^4 (5 - 4x - x^2)\,dx$. Riktig utregning gir $\frac{9}{2}$, som gir kode 20 eller 21. Kode 21 er for de elevene som har brukt kalkulator i utregningene, og som har en akseptabel forklaring på hvordan de har brukt den. Hvis elevene har gjort en feil i utregningene, men har brukt riktig metode, får de kode 10.

Oppgaven faller vanskelig i alle land. Det internasjonale gjennomsnittet for elever som får kode 20 eller 21, er 16 %. Flertrinnsoppgaver, som dette er et eksempel på, er ofte vanskelige for elever. Det norske resultatet på oppgaven er i overkant av det internasjonale gjennomsnittet. Det eneste landet som presterer klart bedre enn Norge er USA, her er det også relativt mange elever som bruker kalkulator for å løse den.

Det er ingen endring fra 2008 til 2015 i andel norske elever som har helt riktig på oppgaven, men det er en større andel som løser den uten bruk av kalkulator i 2015 enn i 2008. Det er det få elever som bruker grafisk kalkulator i 2015. De er vant til å bruke PC sammen med en enkel kalkulator. Dette er en oppgavetype som er en sentral del av pensum i R2, og man kunne derfor kanskje ha ventet et bedre resultat i Norge. Det er sentralt i R2 å beregne areal mellom grafene til to funksjoner, men elevene er vant til å få tegnet grafene, eller bli bedt om å tegne dem og finne skjæringspunktene mellom dem, før de beregner arealet. Norske elever er vant til å få oppgavene delt opp i små deler, og er lite flinke til å planlegge løsing av oppgaver som krever flere trinn. Mer variasjon i oppgavetyper og øvelse i å løse oppgaver som krever flere trinn mot et endelig svar, kan være én måte å fordype elevenes kunnskaper på. Det kan være at man i skolen i litt for stor grad gir oppgaver som likner så mye på hverandre at elevene stopper opp ved mindre endringer i problemformuleringen. Elevene bør også få trening i mer sammensatte oppgaver, der de må tenke flere trinn av gangen og planlegge løsingen før de går i gang.

Kalkulusoppgave 7
Knowing, Use shaded graph to determine integral

Grafen til en funksjon f er vist her. Arealene til tre områder er oppgitt.



Hva er verdien til $\int_0^a f(x)dx$?

Ⓐ -4

Ⓑ 1

Ⓒ 5

Ⓓ 9

MA33076	A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	2	58	6	34	1
Sverige	3	63	9	23	2
USA	2	65	7	23	3
Russland	7	37	11	41	4
Slovenia	2	41	12	39	7
Frankrike	1	53	7	38	2
Portugal	6	22	22	19	32
Int. gj.snitt	3	48	10	31	8

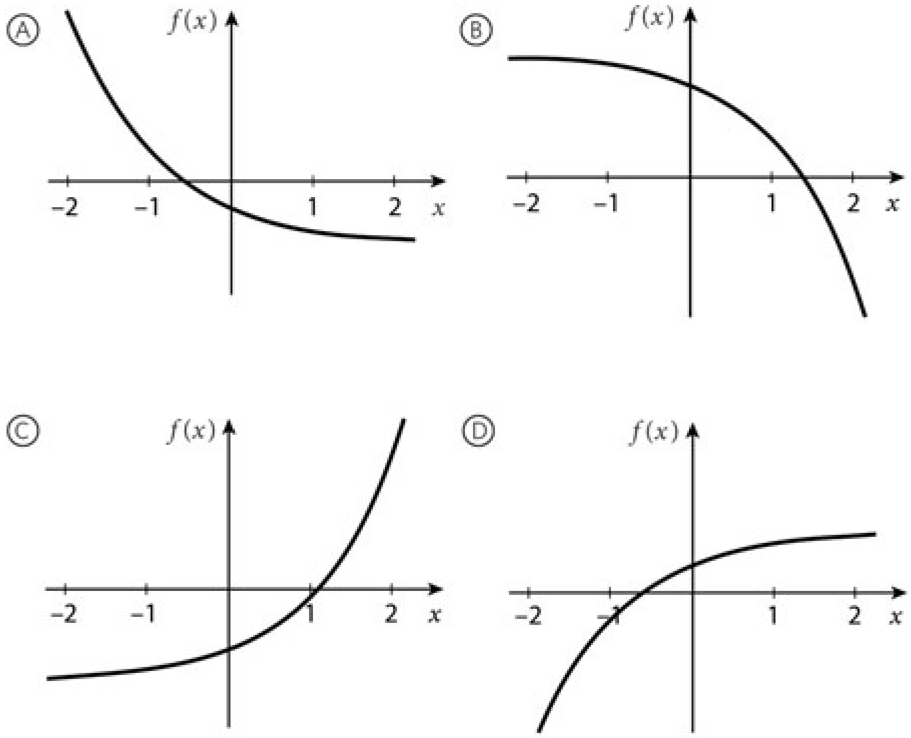
Dette er en flervalgsopppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene vet forskjellen mellom to begreper: på den ene siden arealet mellom en funksjonsgraf og x-aksen mellom to x-verdier, og på den andre siden det bestemte integralet av funksjonen mellom de samme x-verdiene. Elevene får oppgitt verdiene til tre arealer mellom en graf og x-aksen, to arealer over x-aksen og ett under x-aksen. De skal så bruke dette til å beregne det bestemte integralet for funksjonen mellom de to x-verdiene. De må vite at det bestemte integralet er arealet over x-aksen minus arealet under x-aksen, det vil si $(2+3)-4$, som gir at det riktige svaret til det bestemte integralet er lik 1, altså alternativ B.

Norge, Sverige og USA presterer bra på denne oppgaven, klart over det internasjonale gjennomsnittet. Også Frankrike har relativt gode prestasjoner på oppgaven, særlig gjelder det hvis vi tar med i vurderingen at de har en dekningsgrad som er klart høyere enn i de tre nevnte landene. Portugal og Russland har relativt svake prestasjoner.

Det er bra at norske elever gjør det så godt i en internasjonal sammenlikning. Men med tanke på at dette stoffet er en sentral del av R2-pensumet, og at selve oppgavetypen bør være kjent både fra undervisningen i faget og til eksamen, kunne man kanskje ha ventet et enda bedre resultat. Det vanligste feilsvaret i Norge, som i andre land, er alternativ D. Dette feilsvaret indikerer at elevene har en misoppfatning om at areal mellom x-akse og graf er det samme som bestemt integral for funksjonen. Vi vet ikke om det skyldes at de ikke vet at det er en forskjell mellom bestemt integral og areal, eller om det skyldes at de ikke reflekterer over denne forskjellen når den kommer på denne måten i en oppgave.

Kalkulusoppgave 8
Reasoning, Find graph with first and second derivative

Hvilken graf passer med at $f'(x)>0$ og $f''(x)<0$ for alle reelle tall x ?



MA33140	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	11	15	27	44	3
Sverige	9	14	31	42	4
USA	9	12	22	55	3
Russland	7	14	32	44	4
Slovenia	–	–	–	–	–
Frankrike	7	14	31	41	8
Portugal	6	12	16	63	3
Int. gj.snitt	7	13	26	48	5

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal for det første resonnere seg fram til hvilke av de gitte grafene som passer med at den førstederiverte er større enn null, det vil si at $f(x)$ er strengt voksende. Svaralternativene C og D oppfyller begge dette kravet. Elevene må videre vite at når den dobbeltderiverte av en funksjon er mindre enn null, betyr det at grafen vender sin hule side ned (konkav). Det betyr at det riktige svaralternativet for denne oppgaven er D.

I alle landene svarer hovedtyngden av elevene enten C eller D. Det indikerer at majoriteten av elevene vet at $f'(x) > 0$ innebærer at grafen er strengt voksende. I Norge velger vel 70 % av elevene et av disse to alternativene. Det ser ut til at de fleste elevene har en god forståelse av at den første deriverte beskriver om grafen er stigende eller synkende. Derimot er det en del som ikke har forstått hva det betyr at $f''(x) < 0$. Sammenhengen mellom grafen til funksjonen og den andrederiverte er mer uklar enn sammenhengen mellom grafen til funksjonen og den førstederiverte. Vi ser det samme mønsteret i de fleste andre landene. Det landet som skiller seg positivt ut er Portugal, med høyest andel som velger riktig svaralternativ, og med en liten andel elever som velger alternativ C.

Kalkulusoppgave 9
Applying, Rational function limit of leading coefficient

Finn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - a}{ax^2 + 2x}$, der $a \neq 0$.

Ⓐ $\dfrac{1}{a}$

Ⓑ $-\dfrac{a}{a+2}$

Ⓒ ∞

Ⓓ 0

MA33007	A*	B	C	D	Ikke svart
Norge	37	29	11	16	6
Sverige	27	23	21	25	5
USA	56	16	16	10	2
Russland	48	23	12	10	7
Slovenia	50	18	16	11	6
Frankrike	46	8	21	22	4
Portugal	62	8	12	15	4
Int. gj.snitt	54	15	14	13	4

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus hvor elevene skal anvende kunnskaper om grenseverdier for å finne hvilken verdi uttrykket går mot når x går mot uendelig. Oppgaven kan løses ved å dele både teller og nevner på x^2 før man lar x gå mot uendelig. Man vil da se at det riktige svaret er alternativ A.

Norge og Sverige er de to landene som presterer svakest på denne oppgaven, Sverige aller svakest. I Norge er grenseverdier med i læreplanen i både R1 og R2, men begrepet introduseres primært som et verktøy for å finne asymptoter, for å kunne definere derivasjon og integrasjon, og for å avgjøre konvergens av geometriske rekker. Det arbeides ikke så mye med å få elevene til å forstå selve begrepet grenseverdi, noe det svake resultatet på denne oppgaven gir indikasjoner på. Begrepene kontinuitet og grenseverdi er stemoderlig behandlet i norske lærebøker og blir nok tatt lett på i undervisningen.

Alle de andre landene har klart bedre resultater enn Sverige og Norge. Best er resultatene for Portugal med 62 % av elevene som svarer rett, mot bare 37 % i Norge og 27 % i Sverige. Tar man med i vurderingen at Portugal har over dobbelt så høy dekningsgrad som Norge og Sverige, framstår det gode resultatet for de portugisiske elevene som enda bedre.

Kalkulusoppgave 10
Reasoning, Explain continuity of points of piecewise function

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

Begrunn svaret.

MA33214	10 Rett svar	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	8	48	45
Sverige	9	51	41
USA	21	72	8
Russland	13	43	45
Slovenia	21	56	23
Frankrike	21	47	32
Portugal	46	46	8
Int. gj.snitt	22	49	30

Dette er en åpen oppgave i kalkulus. Den er kognitivt kategorisert som resonnering. For å få riktig på oppgaven må elevene både svare rett på spørsmålet om den gitte funksjonen er kontinuerlig i $x = 1$, og gi en akseptabel begrunnelse for det.

Oppgaven kan løses ved å finne grenseverdien for $2x$ når x går mot 1. Man finner da at $2x \to 2$. Man har allerede fått oppgitt i oppgaven at $f(1) = 1$. Det betyr at f ikke kan være kontinuerlig i $x = 1$. En annen måte å begrunne det på er ved å tegne grafen til f. Da ser elevene at linja $2x$ ikke går gjennom punktet (1,1), så f er ikke kontinuerlig i $x = 1$.

Oppgaven viser seg å være relativt vanskelig i alle land, med et internasjonalt gjennomsnitt på like over 20 % for hvor mange som får den rett. Aller svakest er de norske og svenske elevenes prestasjoner, der under 10 % svarer riktig. 45 % av de norske elevene prøver seg ikke engang på oppgaven.

Dette kan skyldes at de er usikre på hva som ligger i begrepet kontinuerlig. (Jamfør rapporten fra TIMSS Advanced 2008 (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), som også rapporterte svake norske resultater på kontinuitet.) De dårlige resultatene kan også skyldes at elevene ikke klarer å tegne en skisse av grafen som illustrerer diskontinuitet.

Stoffet som elevene testes på i denne oppgaven, er noe de jobber mer med i R1 enn i R2. I R1 jobber elevene med å avgjøre om ulike funksjoner med delt forskrift er kontinuerlige eller ikke, men begrepene grenseverdi og kontinuitet blir ikke tatt opp på en grundig måte i lærebøkene. Resultatene fra TIMSS Advanced tyder på at elevene har en svak forståelse av disse begrepene. De har antakelig liten erfaring med funksjoner som *ikke* er kontinuerlige.

Det landet som presterer klart best på oppgaven, er Portugal, særlig hvis man tar med i vurderingen deres høye dekningsgrad. Det kan tyde på at spørsmål om kontinuitet av funksjoner er mer sentrale i deres pensum enn i de andre landene som er med i TIMSS Advanced.

Kalkulusoppgave 11
Knowing, Find exponential limit

Finn $\lim_{x \to \infty} 2^{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}$

Ⓐ -2

Ⓑ 0

Ⓒ $\frac{1}{4}$

Ⓓ 4

MA33046	A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	11	10	66	6	8
Sverige	16	12	58	6	8
USA	6	23	59	3	9
Russland	9	11	66	7	7
Slovenia	9	16	57	6	13
Frankrike	5	16	70	5	4
Portugal	5	9	79	3	4
Int. gj.snitt	6	23	59	3	9

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus kategorisert kognitivt som å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste om elevene har elementære kunnskaper om grenseverdier. For å løse oppgaven må man vite at en konstant delt på noe som går mot uendelig, går mot null. Man får da at grenseverdien blir 2^{-2}, som er det samme som $\frac{1}{4}$. Alternativ C er derfor riktig svar.

Oppgaven framstår som relativt lett i alle land, og de norske elevenes prestasjoner er litt bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. De to landene som presterer best, er Portugal og Frankrike; begge land har også høy dekningsgrad. Det er tydelig at dette er sentralt stoff for portugisiske og franske elever.

På andre oppgaver som tester elevenes kunnskaper om grenseverdier, er de norske prestasjonene svake, se for eksempel kalkulusoppgavene 9 og 10.

Kalkulusoppgave 12
Knowing, Derivative of sin^2 when argument is function

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

Ⓐ $2\sin(h(x))h'(x)$

Ⓑ $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

Ⓒ $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

Ⓓ $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

MA33162	A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	18	39	19	16	9
Sverige	21	40	14	15	10
USA	11	58	12	12	7
Russland	15	58	15	8	5
Slovenia	23	47	13	12	6
Frankrike	21	26	21	22	11
Portugal	17	36	26	12	10
Int. gj.snitt	17	46	16	13	8

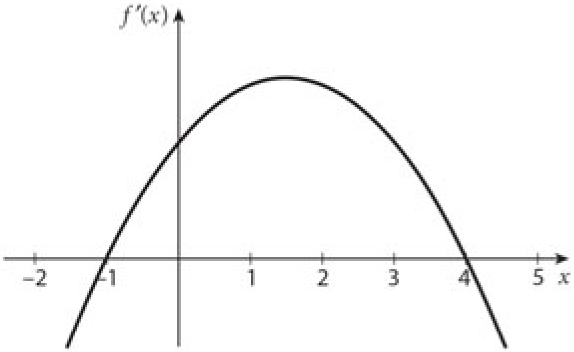
Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus kategorisert kognitivt som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene vet hvordan de skal bruke kjerneregelen når de skal derivere en funksjon. I kalkulusoppgave 1 viste norske elever at de har en grunnleggende forståelse av kjerneregelen, men i denne oppgaven er det noen kompliserende faktorer. Funksjonen de skal derivere, kan oppfattes som sammensatt av tre funksjoner. Siden sinus er i andre potens, må man først derivere denne med hensyn på sinusfunksjonen som kjerne og få $2\sin(h(x))$, så må man derivere denne kjernen, som gir $\cos(h(x))$, for til slutt å derivere den indre kjernen $h(x)$, som gir $h'(x)$. Disse tre uttrykkene skal multipliseres med hverandre slik det er gjort i alternativ B, som dermed er rett svar på oppgaven.

Det norske resultatet er her svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. USA og Russland presterer best. Et typisk trekk ved oppgaven er at det i alle land ser ut til å være en relativt jevn fordeling på feilsvar, det er ikke ett feilsvar som markerer seg som det de fleste elevene velger. Alle feilsvarene er konstruert slik at de starter riktig med den første derivasjonen, som gir $2\sin(h(x))$. Deretter er det en feil i det videre arbeidet som peker på at elevene roter med de siste derivasjonene. Et hovedproblem for de som ikke lykkes i å løse oppgaven, kan være er at de ikke har sett at det gitte funksjonsuttrykket må oppfattes som sammensatt av tre funksjoner, som $x \to h(x) \to \sin(h(x)) \to \sin^2(h(x))$. Det er også mulig at elevene har klart å identifisere at det er tre funksjoner, men ikke klart å bruke kjerneregelen korrekt. Sammensatte funksjoner er ikke et eget emne i norske læreplaner og lærebøker, og elevene ser dem egentlig bare i eksempler. Det er ikke vanlig å dele opp en sammensatt funksjon slik som $x \to h(x) \to \sin(h(x)) \to \sin^2(h(x))$. Omvendte funksjoner er heller ikke nevnt i lærebøker og læreplaner. Vi tror at vektlegging av disse begrepene vil lette elevenes forståelse av kjerneregelen.

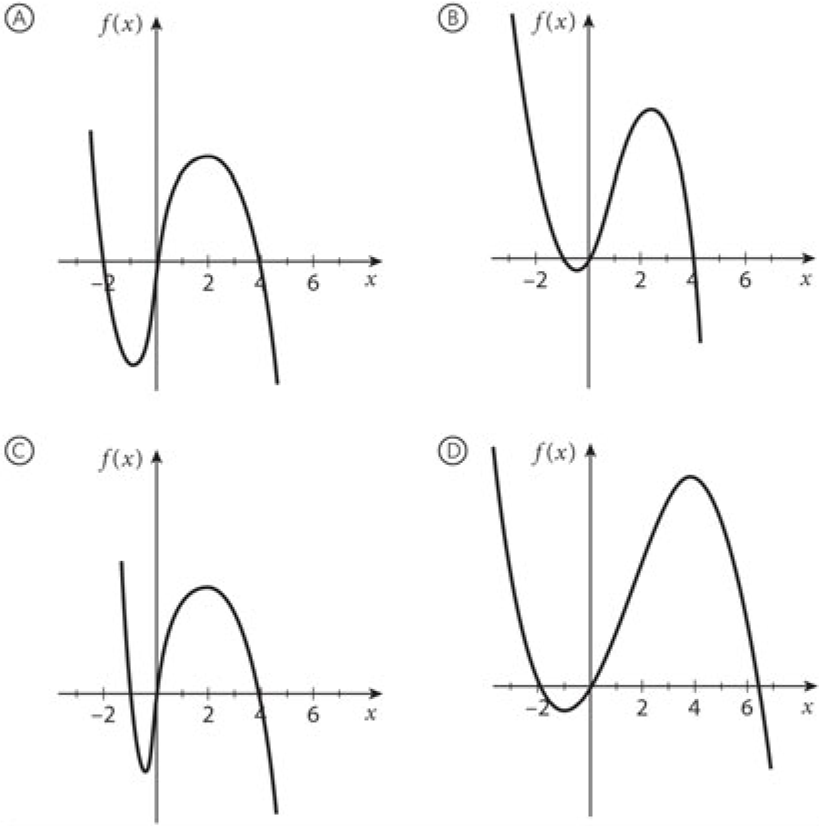
Elevene må ha en relativt god forståelse av kjerneregelen for å løse oppgaven. Mange norske elever har antakelig ikke denne dybdeforståelsen. Dybdeforståelse henger ofte sammen med i hvilken grad det legges opp til å jobbe med lærestoffet over tid, slik at man får en modning hos elevene. Mangelen på dybdeforståelse hos elevene vi tester i videregående skole, kan ha sammenheng med at norske elever ikke har med seg den grunnleggende forståelsen av abstrakt matematikk fra grunnskolen. Dette kan ha medført at for mye tid i videregående skole går med til en del elementær læring som kunne ha kommet tidligere i skoleløpet. Flere av de resultatene vi presenterer i denne boka, peker på behovet for en grundig gjennomgang av progresjonen av lærestoffet i matematikk gjennom hele det norske skoleløpet. (Se kapittel 5 og 6.)

Kalkulusoppgave 13
Knowing, Discern function graph from derivative graph

Grafen til den førstederiverte av funksjonen *f* er vist under.



Hvilken graf ser ut til å passe best med *f*?



MA33163	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	11	21	9	53	7
Sverige	11	22	11	49	7
USA	9	21	7	58	5
Russland	8	17	14	58	4
Slovenia	13	31	17	34	5
Frankrike	9	23	13	50	5
Portugal	7	23	11	54	5
Int. gj.snitt	9	22	12	50	6

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene på basis av den gitte grafen til f' greier å bestemme hvilken av fire gitte grafer som kan være grafen til f. Fra grafen til den førstederiverte kan man se at f må ha ekstremalpunkter for $x = -1$ og $x = 4$, siden det er her den deriverte er lik 0 og skifter fortegn. Siden $f'(x)$ går fra negativ verdi til positiv verdi i $x = -1$, må det være et minimalpunkt for grafen, mens $x = 4$ må være et maksimalpunkt siden den deriverte går fra å være positiv til å bli negativ. Alternativ D er riktig svar på oppgaven; det er bare denne grafen som har minimum for $x = -1$ og maksimum for $x = 4$.

Alle grafene har samme «fasong», så oppgaven krever at elevene må se ganske grundig på de ulike grafene. Det vanligste feilsvaret i Norge (og gjennomgående i de andre landene) er alternativ B. Elevene ser ut til å tro at nullpunktene til f' og f er sammenfallende. Funksjonsdrøfting er en sentral del av det man arbeider med i R1. Det som testes i oppgaven er kjent stoff, både fra undervisning og på eksamen, men det gis oftere som en åpen oppgave der elevene selv skal skissere grafen. Det kan forekomme slike oppgaver i R2, men det vil da ofte følges av en oppgave knyttet til integrasjon og areal.

Det er relativt små variasjoner mellom landene i prestasjoner på denne oppgaven. Andelen som får riktig, ligger rundt 50 til 60 % i alle land unntatt Slovenia med 34 %. Tar man med at Slovenia har en langt høyere dekningsgrad enn de andre landene, framstår deres resultat noe bedre. Det er positivt at norske elever presterer i overkant av det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven.

Kalkulusoppgave 14
Reasoning, Find range of integral with variable upper bound

La a og b være reelle tall som tilfredsstiller $a > 2$ og $\int_1^a 2x\,dx = b$.
Hva er de mulige verdiene til b ?

Ⓐ $b \geq -1$

Ⓑ $b > 0$

Ⓒ $b > 2$

Ⓓ $b > 3$

MA33066	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	6	14	22	47	11
Sverige	8	19	24	38	11
USA	5	14	23	51	8
Russland	6	21	25	41	7
Slovenia	8	19	25	39	9
Frankrike	5	19	29	38	9
Portugal	11	20	25	11	34
Int. gj.snitt	7	17	23	40	14

Dette er en flervalgsoppgave hvor elevene skal resonnere seg fram til hvilke verdier b kan ha, gitt at a er større enn 2. En måte å løse oppgaven på er å beregne $\int_1^a 2xdx = a^2 - 1$. Ved å sette inn $a = 2$ får man at det bestemte integralet da er lik 3. I oppgaven står det at $a > 2$. Det vil si at verdien b av det bestemte integralet må oppfylle $b > 3$ (siden integranden er positiv) som gir at alternativ D er det riktige svaret. Utfordringen i oppgaven kan antas å være at man ikke kan gå rett fram og beregne det bestemte integralet, men må ta med i betraktning at a er en parameter. Det synes rimelig å anta at mange elever har greid å integrere og få uttrykket $a^2 - 1$, men så klarer de ikke å utnytte opplysningen om at $a > 2$ til å finne fram til det korrekte svaret.

Dette er en oppgave hvor norske elever gjør det relativt godt i en internasjonal sammenlikning, bedre enn alle de andre landene, bortsett fra USA som ligger litt over Norge. Svakere prestasjoner ser man i Sverige, Frankrike og Slovenia, mens Portugal er det landet som presterte aller svakest på oppgaven. I Portugal valgte 1/3 av elevene å ikke svare på oppgaven. I alle land var alternativ C det vanligste feilsvaret, mens færrest elever valgte feilsvaret A. Dette er en oppgave som er dekket av pensum i R2.

Avsluttende kommentarer

Det er positivt at norske R2-elevers prestasjoner i derivasjon framstår som relativt gode i et internasjonalt perspektiv, og ikke minst at det er en positiv utvikling i disse kunnskapene sammenliknet med resultatene i tidligere TIMSS Advanced-studier. Det har blitt pekt på mulige årsaker til denne norske framgangen i prestasjoner i kommentarene til flere av oppgavene, som for eksempel bedre vedlikehold av tidligere innlært stoff fra R1 fordi det nå i større grad testes på prøver og eksamener i R2. En annen viktig grunn det pekes på, er at differensiallikninger har kommet inn som læringsstoff i R2 etter 2008. Arbeid med differensiallikninger forutsetter at elevene har relativt gode kunnskaper om både derivasjon og integrasjon. Det er derfor rimelig å anta at derivasjon nå er et område hvor elevene både vedlikeholder tidligere kunnskaper og arbeider med stoffet på flere måter enn tidligere; dermed kan de utvikle en dypere forståelse. Vedlikehold av kunnskap, og modning over tid ved å arbeide med stoff fra ulike innfallsvinkler, er essensielt i et hierarkisk og abstrakt fag som matematikk. I kurset R2 er det ikke så mange emner som i tidligere matematikkurs, og emnene henger i stor grad sammen. Dette gjør at elevene mer enn tidligere får gå i dybden, kanskje med unntak av algebra. Vi ser at elevene kan løse ganske avanserte oppgaver i kalkulus, men at besvarelsene ofte inneholder algebraiske feil.

Når det gjelder forståelsen av sentrale begreper som grenseverdi og kontinuitet, er de norske prestasjonene ikke oppløftende. Det gis klare indikasjoner fra flere oppgaver på at norske elever ikke har en tilstrekkelig forståelse av disse begrepene. Én mulig årsak kan være at dette tas opp nokså kortfattet og kanskje overflatisk rett før man trenger det, uten at man går dypere inn i stoffet. Det gir elevene liten mulighet til modning og forståelse av stoffet. Funksjon, grenseverdi, kontinuitet og derivert er sentrale begreper som elevene trenger tid på å forstå ordentlig. De kommer egentlig innom disse begrepene helt fra ungdomstrinnet, men det legges for lite vekt på dybdelæring, som krever tid og grundighet.

Modning over tid er ofte nødvendig når det gjelder abstrakte begreper i matematikk. De problemene elevene har, kan også skyldes svake forkunnskaper fra grunnskolen (se kapittel 3 og 6 i denne boka). Hvis forkunnskapene er svake, kan det medføre at man i videregående skole bruker for mye tid på å lære elevene det de egentlig skulle ha lært tidligere. Dette står ikke i motsetning til hele tiden å passe på at tidligere innlært stoff repeteres. Det er stor forskjell på å repetere stoff og det å måtte gjennomføre den grunnleggende opplæringen.