KAPITTEL 8

# Oppgaver i algebra fra TIMSS Advanced 2015

*Liv Sissel Grønmo*
*Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO*
*Ingvill Merete Stedøy*
*Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole*
*Matematikksenteret, NTNU, Trondheim*
*Arne Hole*
*Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO*

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet algebra i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapittelet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og for «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

| | | |
|---|---|---|
| Norge | 10,6 % | 18,7 år |
| Sverige | 14,1 % | 18,7 år |
| USA | 11,4 % | 18,1 år |
| Russland | 10,1 % | 17,7 år |
| Slovenia | 34,4 % | 18,8 år |
| Frankrike | 21,5 % | 18,0 år |
| Portugal | 28,5 % | 18,1 år |

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i algebra, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

## *Algebraoppgave 1*
## *Knowing, Find an equivalent fraction*

Dersom $x > 0, y > 0$, og $x \neq y$, så er $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ lik:

(A) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

(B) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

(C) $\frac{1}{x-y}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}$

(E) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2-y^2}$

| MA13011 | | A* | B | C | D | E | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Norge** | 1998 | 30 | 15 | 12 | 30 | 7 | 7 |
| | 2008 | 25 | 12 | 13 | 39 | 8 | 4 |
| | 2015 | 23 | 22 | 14 | 27 | 8 | 7 |
| Sverige | | 20 | 12 | 12 | 41 | 7 | 7 |
| USA | | 42 | 14 | 8 | 30 | 4 | 2 |
| Russland | | 58 | 13 | 13 | 9 | 6 | 2 |
| Slovenia | | 55 | 13 | 6 | 20 | 4 | 2 |
| Frankrike | | 44 | 18 | 5 | 18 | 10 | 5 |
| Portugal | | 61 | 16 | 4 | 10 | 7 | 3 |
| Int. gj.snitt | | 49 | 14 | 8 | 19 | 7 | 4 |

Dette er en flervalgsoppgave som tar sikte på å teste om elevene har elementære faktakunnskaper i algebra, i dette tilfellet elementære kunnskaper når det gjelder konjugatsetningen. Oppgaven kan løses ved å multiplisere med $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ i teller og nevner, og deretter bruke konjugatsetningen på nevneren. Ved korrekt utregning får man da det som står i alternativ A. Det er ikke så vanlig i oppgaver og lærebøker i Norge at elevene skal bruke kvadratsetningene, her konjugatsetningen, på uttrykk hvor $x$ eller $y$ står under et rottegn. Det legges heller ikke lenger vekt på å gjøre om brøkuttrykk slik at det ikke forekommer rottegn i nevneren i det endelige svaret. Begge disse forholdene kan ha bidratt til usikkerhet hos de norske elevene.

Internasjonal gjennomsnittlig løsningsprosent på denne oppgaven er nær 50 %, mens den i Norge er litt over 20 %, og i Sverige 20 %. I de andre landene varierer andelen med rett svar fra vel 40 % til vel 60 %. Det svake norske resultatet framstår enda svakere hvis man tar med dekningsgrad i vurderingen. Frankrike har dobbelt så høy dekningsgrad som Norge, Portugal over to og en halv gang så høy og Slovenia over tre ganger så høy dekningsgrad som Norge. Tar man dekningsgraden med i vurderingen av resultatene, framstår Norge og Sverige som spesielt svake. Dette er en oppgave som har vært med i begge de to foregående TIMSS Advanced-studiene. Det er verdt å merke seg en jevn tilbakegang i prestasjon hos norske elever på denne oppgaven.

Det vanligste feilsvaret i nesten alle land er alternativ D. De elevene som har valgt D, kan ha tenkt at de kan dele opp uttrykket i to brøker direkte. Det indikerer at deres generelle kunnskaper om brøk og bruk av fellesnevner ikke er godt befestet. En relativt stor del av de norske elevene gjør feilen å velge alternativ B, noe som kan tyde på at de er usikre i bruken av kvadratsetningene. Mange elever, selv på dette nivået, ser ut til å tro at $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x - y$. I motsetning til de som har valgt alternativ D, har de vært innom en kvadratsetning, men har brukt den feil.

I USA har også en betydelig andel, 30 %, valgt feilsvaret D. Men i motsetning til i de nordiske landene har likevel flest elever i USA valgt det riktige alternativet A. Mange analyser av lands profiler når det gjelder matematikkundervisning (se kapittel 3), viser at vi har en relativt stabil nordisk profil og engelskspråklig profil. Samtidig finner vi fellestrekk mellom disse to profilene, som relativt liten vekt på algebra i skolen. Man skal være forsiktig med å trekke vidtrekkende konklusjoner basert på enkeltoppgaver, men det er likevel interessant å se at resultatet på denne oppgaven faller inn i mønsteret som tidligere analyser av ulike profiler i matematikkundervisningen har vist. For mer om dette, se kapittel 4 og 5.

To land som gjør det relativt bra på denne oppgaven, er Russland og Slovenia, med godt over 50 % som svarer riktig. Dette samsvarer også med tidligere analyser av matematikkundervisningen i østeuropeiske land, som sammen med østasiatiske land legger mer vekt på å lære elevene algebra enn det som gjøres i nordiske og engelskspråklige land (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Olsen & Grønmo, 2006).

De europeiske latinspråklige landene Portugal og Frankrike presterer også relativt bra på denne oppgaven, spesielt hvis vi tar hensyn til dekningsgradene.

### *Algebraoppgave 2*
### *Knowing, Cubing a trigonometric function*

Dersom $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, så er $z^3$ lik:

Ⓐ $0$

Ⓑ $1$

Ⓒ $i$

Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$

Ⓔ $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$

| MA13012 | | A | B | C* | D | E | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 1998 | 3 | 16 | 27 | 35 | 6 | 12 |
| | 2008 | 3 | 13 | 24 | 44 | 7 | 10 |
| | 2015 | 2 | 13 | 22 | 44 | 8 | 11 |
| Sverige | | 4 | 18 | 31 | 27 | 13 | 7 |
| USA | | 3 | 6 | 25 | 41 | 20 | 5 |
| Russland | | 2 | 10 | 35 | 36 | 11 | 6 |
| Slovenia | | 4 | 8 | 22 | 33 | 27 | 7 |
| Frankrike | | 2 | 9 | 37 | 32 | 13 | 8 |
| Portugal | | 2 | 6 | 35 | 31 | 16 | 11 |
| Int. gj.snitt | | 3 | 10 | 34 | 32 | 14 | 9 |

Dette er en flervalgsoppgave som inneholder komplekse tall. Elevene kan løse den ved å bruke at $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, slik at når de opphøyer i tredje, får de $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$. Alternativt kan de benytte seg av $i^2 = -1$ når de løser opp parenteser og trekker sammen leddene, og sette inn de eksakte verdiene til cosinus og sinus. I heftene for testen som elevene får utdelt, står det oppgitt en del formler som $i^2 = -1$ og eksakte verdier for sinus til 30, 45 og 60 grader. Elevene gjøres oppmerksom på dette som en del av gjennomgangen før de begynner å løse oppgaver.

Norge presterer svakest av alle landene på denne oppgaven, særlig når vi tar dekningsgraden med i vurderingen. Det er ikke så overraskende, siden komplekse tall ikke står nevnt i den norske læreplanen. Likevel kan man anta at norske elever møter noe om komplekse tall i forbindelse med løsning av 2. ordens homogene differensiallikninger. Da skal de løse en karakteristisk likning, og kan få komplekse tall som løsninger. Men generelt er det liten vekt på komplekse tall i norsk skole siden det ikke står i læreplanen. De fleste norske elevene, hele 44 %, velger feilsvaret D. Det ser derfor ut som om det ligger et bevisst valg bak de norske elevenes svar, særlig siden mønsteret er stabilt i alle de tre rundene av studien. Her har de kanskje tenkt at $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + i\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$. Det er altså utregningen av parentesen opphøyd i tredje som er den mest graverende algebrafeilen etter vår mening. De tar ikke hensyn til $i$-en, og vet neppe hva den betyr. Nå har man også hatt studier som viser at elever tenderer mot å velge svar som ser mest mulig kompliserte ut dersom de ikke vet hvilket svar som er riktig.

I mange andre land er komplekse tall med i læreplanen i videregående skole. Det betyr ikke at Norge uten videre skal ta det inn i den norske læreplanen. Vi skal ikke endre norsk læreplan bare for å prestere best mulig på en internasjonal studie som TIMSS Advanced. Informasjon vi får ved å delta i TIMSS Advanced, er naturlig å ta med når man drøfter hva som skal være med av innhold i læreplanen, men begrunnelsene for valg av innhold bør være basert på faglige prioriteringer av hva som er viktig for elevene å lære, ikke styres av hva som testes i internasjonale studier.

## *Algebraoppgave 3*
## *Applying, Value of x to make function negative*

Funksjonen $f$ definert ved

$$f(x) = \frac{(x-1)(3x+1)}{(2x-1)(x-2)},$$

er negativ for alle $x$ som er slik at

Ⓐ $-\frac{1}{3} < x < 3$

Ⓑ $\frac{1}{2} < x < 2$

Ⓒ $1 < x < 3$

Ⓓ $\frac{1}{2} < x < 2$ eller $2 < x < 3$

Ⓔ $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ eller $1 < x < 2$

| MA13013 | | A | B | C | D | E* | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 1998 | 7 | 9 | 7 | 7 | 64 | 6 |
| | 2008 | 8 | 14 | 9 | 14 | 48 | 8 |
| | 2015 | 7 | 18 | 9 | 11 | 45 | 11 |
| Sverige | | 10 | 17 | 14 | 13 | 34 | 12 |
| USA | | 8 | 22 | 6 | 9 | 52 | 3 |
| Russland | | 6 | 10 | 6 | 7 | 68 | 3 |
| Slovenia | | 10 | 17 | 8 | 12 | 49 | 5 |
| Frankrike | | 7 | 14 | 5 | 10 | 56 | 8 |
| Portugal | | 9 | 12 | 5 | 8 | 59 | 7 |
| Int. gj.snitt | | 8 | 16 | 7 | 9 | 54 | 7 |

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som er konstruert med sikte på å teste elevenes evne til å anvende sin kunnskap om funksjoner for å finne ut i hvilke områder funksjonen har en negativ verdi. En nærliggende metode for å avgjøre det, er å tegne fortegnslinjeskjema for faktorene i funksjonen. Det riktige svaret er alternativ E.

Innholdet i oppgaven er pensum i R1 og passer på den måten godt inn i det som er norsk tradisjon. Likevel er de norske resultatene svake, svakere enn i alle de andre landene bortsett fra Sverige, som skårer enda lavere enn Norge. Årsaken til de svake resultatene i Norge kan være dårlig vedlikehold av det elevene lærte i R1, og at de dermed har glemt denne kunnskapen når de er på slutten av R2-kurset. Vi synes likevel at det er rart at elevene ikke klarer denne, da de også har funksjonsdrøfting i R2 – riktignok med vekt på andre typer funksjoner. Vedlikehold av kunnskap er sentralt i et fag som matematikk, mer sentralt enn i mange andre skolefag. Matematikk er i sin natur et hierarkisk fag der kunnskaper bygger på hverandre. Det er også viktig å huske på at kunnskap som er forstått, lettere kan tas i bruk enn kunnskap som bare ble memorert ved innlæring.

Det har vært en vanlig oppfatning i Norge at man ikke skulle teste elevene til eksamen i det de hadde lært i tidligere år (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Dette har endret seg i senere tid, og nå er det akseptert at man på eksamen kan testes også i det som var pensum i tidligere kurs. Det svake norske resultatet på denne oppgaven gir likevel indikasjoner på at man fortsatt trenger å bli bedre på å vedlikeholde tidligere kunnskap.

### *Algebraoppgave 4*
### *Knowing, Which term has a value of 243?*

I den geometriske følgja $\frac{1}{3}, 1, 3, \ldots, t_n, \ldots$ er $t_n$ ledd nummer $n$. Kva for eit ledd har verdien 243?

(A) $t_6$

(B) $t_7$

(C) $t_8$

(D) $t_{81}$

| MA23005 | | A | B* | C | D | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 2008 | 13 | 60 | 6 | 18 | 3 |
| | 2015 | 15 | 59 | 7 | 16 | 3 |
| Sverige | | 14 | 45 | 12 | 24 | 6 |
| USA | | 14 | 61 | 8 | 12 | 6 |
| Russland | | 11 | 71 | 5 | 13 | 1 |
| Slovenia | | 11 | 57 | 8 | 19 | 5 |
| Frankrike | | 31 | 34 | 5 | 27 | 3 |
| Portugal | | 10 | 46 | 12 | 24 | 9 |
| Int. gj.snitt | | 16 | 50 | 8 | 20 | 6 |

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som tar sikte på å teste elevenes faktakunnskaper om geometriske rekker. Siden heftene som elevene får, inneholder en del formler, blant annet formler for sum og $n$-te ledd i en geometrisk rekke, burde ikke oppgaven være så vanskelig. Elevene gjøres oppmerksomme på disse formlene ved gjennomgangen før de begynner å løse oppgaver. Elevene kan bruke den oppgitte formelen og enten ved hjelp av logaritmer eller på andre måter løse den likningen man får, for å finne det riktige svaret. Elevene kan dessuten bare gange seg framover og se at de treffer tallet i det 7. leddet, og trenger ikke å bruke formelen i det hele tatt. Hvis de har forstått definisjonen av geometriske tallfølger, og ser at kvotienten er 3, skal dette være en oppgave alle bør få til. Alternativ B er løsningen på oppgaven.

Rekker er en sentral del av læreplanen i R2, og det er derfor rimelig å forvente at mange norske elever skal greie å løse oppgaven riktig. Elevene skal kunne «*utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker*», står det i læreplanen (https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r2).

Det norske resultatet med tilnærmet 60 % som gir rett svar, er bedre enn det internasjonale snittet på 50 %. Det er bare Russland som har en klart større andel med rett svar på denne oppgaven. Tar man hensyn til dekningsgraden i landene, framstår derimot ikke det norske resultatet fullt så bra. Russland har omtrent samme dekningsgrad som Norge, men Slovenia har en dekningsgrad over tre ganger så høy som Norge, Portugal over to og en halv gang så høy og Frankrike dobbelt så høy som Norge. Likevel er hovedkonklusjonen at dette er en algebraoppgave med relativt gode norske resultater.

*Algebraoppgave 5*
*Knowing, How many 3 digits numbers formed*

Ein boks inneheld 6 kuler, nummerert frå 1 til 6. Jon tek 3 kuler frå boksen, ei etter ei, utan å sjå på tala. Han legg kulene på rad i same rekkjefølgje som han tok dei frå boksen. Kor mange ulike tresifra tal kan han danne på denne måten?

Svar: ______________

| MA23145 | | 10 Rett svar: 120 | 70 Feil svar: 216 | 79 Andre feil | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 2008 | 30 | 11 | 50 | 9 |
| | 2015 | 42 | 6 | 40 | 12 |
| Sverige | | 32 | 6 | 55 | 7 |
| USA | | 33 | 7 | 57 | 4 |
| Russland | | 36 | 6 | 46 | 13 |
| Slovenia | | 54 | 2 | 38 | 6 |
| Frankrike | | 15 | 15 | 63 | 6 |
| Portugal | | 67 | 1 | 28 | 4 |
| Int. gj.snitt | | 33 | 7 | 57 | 4 |

Dette er en åpen oppgave, altså uten gitte svaralternativer, hvor elevene selv skal beregne det riktige svaret og skrive det ned. Oppgaven tar sikte på å teste elevene i en type elementær kunnskap, faktakunnskaper på området kombinatorikk. Oppgaven presenteres i en konkret kontekst, noe som vektlegges i norske læreplaner på alle nivåer. Oppgaven løses ved bruk av kombinatorisk resonnement. Dette er et ordnet utvalg uten tilbakelegging, som er en av standardsituasjonene de norske elevene har arbeidet med. Ved første trekk har man 6 muligheter for hvilken kule man får, ved andre trekk 5 muligheter og ved tredje trekk 4 muligheter. Antall muligheter for hvert trekk multipliseres så med hverandre og gir $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, som er det riktige svaret. Hvis elevene har behandlet dette som et ordnet utvalg med tilbakelegging, det vil si at det er 6 mulige valg hver gang man trekker en kule, får man feilsvaret 216 basert på utregning av $6 \cdot 6 \cdot 6$. Dette feilsvaret har fått en egen kode for å se hvor mange prosent som gjorde denne feilen.

Kombinatorikk er ikke spesielt sentralt stoff i R2, det er mer sentralt i R1 og på lavere nivåer i skolen. Ut fra læreplanen og hva som presenteres i lærebøker, skal elever helt ned på mellomtrinnet kunne få til denne oppgaven. Norske elevers prestasjoner på oppgaven er likevel relativt gode sammenliknet med de andre landene, og det er bare i Portugal og Slovenia at en større andel av elevene svarer rett. I disse landene er det en klart større andel som svarer riktig, og tar man også dekningsgraden med i vurderingen, er deres resultater langt bedre enn de norske. På den andre siden er spesielt de franske resultatene svake på denne oppgaven. Også elever i Sverige, USA og Russland presterer svakere enn norske elever. Dette ser ut til å være en oppgave med store variasjoner mellom land når det gjelder vektlegging av det innholdet den tester elevene i, nemlig kombinatorikk. Denne delen av algebra har tradisjonelt ikke har vært veldig sentral i skolematematikken, men i Norge er kombinatorikk og sannsynlighet et tema helt ned på mellomtrinnet.

Det er også interessant å merke seg at Norge har en klar framgang i andelen som løser oppgaven riktig fra 2008 til 2015. Det samme mønsteret fins i Sverige, selv om vi ikke har lagt det inn i tabellen over. Det kan se ut til at denne typen oppgaver står relativt sterkt i nordiske land. Merk at denne oppgaven neppe ville ha blitt kategorisert som algebra i en norsk skolekontekst. Kombinatorikk er i Norge et tema som behandles sammen med statistikk og sannsynlighet. At både Norge og Sverige har framgang fra 2008, kan være et tegn på økende vektlegging av dette i disse landene. Dette eksemplifiserer at når man diskuterer resultater fra studiene, bør man ikke bare se overflatisk på kategoriseringer som «algebra» og «statistikk». Man må også se på hvilket innhold som er definert til å ligge innenfor emneområdene.

## *Algebraoppgave 6*
## *Applying, New diameter of soup can*

Ei bedrift lagar boksar med sylinderform som har diameter 6 cm, og som kan innehalde 600 $cm^3$ suppe. Bedrifta ønskjer å endre diameteren til boksane, men halde høgda uendra, slik at boksane kan innehalde 750 $cm^3$ suppe. Kva må den nye diameteren vere?

Vis framgangsmåten.

| MA23187 | | 20<br>Helt riktig | 21<br>Helt riktig med kalkulator | 10<br>Delvis riktig | 79<br>Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 2008 | 56 | 1 | 18 | 18 | 8 |
| | 2015 | 51 | 0 | 23 | 17 | 8 |
| Sverige | | 57 | 0 | 9 | 25 | 8 |
| USA | | 40 | 1 | 18 | 36 | 4 |
| Russland | | 39 | 1 | 12 | 31 | 17 |
| Slovenia | | 32 | 0 | 34 | 27 | 7 |
| Frankrike | | 33 | 0 | 12 | 42 | 14 |
| Portugal | | 43 | 0 | 14 | 35 | 8 |
| Int. gj.snitt | | 40 | 0 | 16 | 31 | 12 |

Dette er en algebraoppgave hvor elevene må kunne bruke formelen for volumet av en sylinder. Oppgaven har altså et geometrielement i seg i tillegg til det algebraiske. Elevene må finne en løsningsmetode, beskrive framgangsmåten og skrive ned svaret. Oppgaven er kognitivt kategorisert som anvendelse av kunnskap.

Formelen for volumet av den sylinderformede boksen er oppgitt i formelsamlingen i begynnelsen av heftene. Elevene gjøres oppmerksomme på disse formlene før de begynner å løse oppgaver. Oppgaven kan løses ved å sammenlikne formelen for volumet til den opprinnelige boksen med formelen for den nye boksen. Siden høyden $h$ er den samme, kan høyden elimineres. Det uttrykket man da får, kan brukes til å finne diameteren i den nye boksen. Svarene 6,72; 6,7 og $3\sqrt{5}$ aksepteres alle som riktige, og eleven får en kode på 20-nivå.

Vi har angitt både 20- og 21-koden i tabellen over. 21-koden skulle fange opp de elevene som oppga en riktig likning for å løse oppgaven, men brukte kalkulator for å løse likningen. Som vi ser, var det omtrent ingen elever som brukte kalkulator her. Elever som har brukt en riktig metode, men som har gjort en feil underveis, fikk kode 10.

På tross av en svak tilbakegang fra 2008 er det norske resultatet godt i et internasjonalt perspektiv, og klart over det internasjonale gjennomsnittet. Oppgaven er i samsvar med norsk læreplan i matematikk som gjennomgående legger relativt stor vekt på at oppgaver til elevene skal være praktiske og konkrete. Formelregning er med i læreplanene fra 8. trinn. Dessuten kan vi regne med at mange elever som velger R2, er vant til mye formelregning i fysikk. Svenske elever presterer også bra på oppgaven. Prestasjonene i Slovenia og Russland er relativt svake. Dette samsvarer med tidligere profilanalyser av land (se kapittel 4), hvor land med en østeuropeisk profil legger relativt stor vekt på ren, abstrakt matematikk, men ikke like stor vekt på praktiske anvendelser.

### *Algebraoppgave 7*
### *Reasoning, What is the error Carl made?*

Carl vil løyse likninga $\ln(2x-1)=0$. Løysingsforsøket hans er vist nedanfor, men inneheld ein feil.

$$
\begin{aligned}
&\ln(2x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x-\ln 1=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x-0=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &2x=1\\
\Leftrightarrow\ &x=0{,}5
\end{aligned}
$$

Kva for ein feil gjorde Carl?

| MA23201 | | 10 Rett svar | 79 Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|
| Norge | 2008 | 24 | 54 | 22 |
| | 2015 | 43 | 42 | 16 |
| Sverige | | 38 | 40 | 23 |
| USA | | 38 | 55 | 7 |
| Russland | | 49 | 37 | 13 |
| Slovenia | | 45 | 45 | 11 |
| Frankrike | | 63 | 31 | 6 |
| Portugal | | 55 | 39 | 6 |
| Int. gj.snitt | | 48 | 41 | 12 |

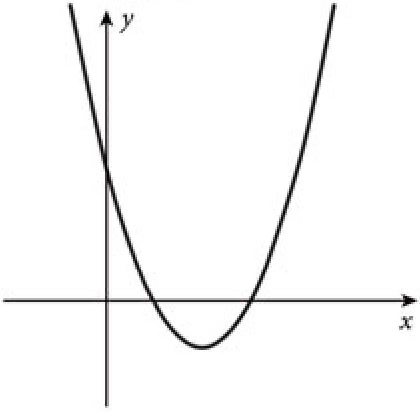
Dette er en åpen resonnementsoppgave hvor elevene skal finne fram til og forklare hvilken feil Carl gjorde når han prøvde å løse den gitte likningen. De skal ikke gjøre noen egne beregninger, men se på det som presenteres som et elevsvar, og finne den feilen Carl har gjort. Nesten alle elevene som fikk rett på oppgaven, forklarte hvilken feil som var gjort i utregningen med logaritmer, og henviste til overgangen mellom linje 1 og linje 2. Noen få elever fikk også rett hvis den generelle forklaringen om hvordan man regner med logaritmer stemte, men uten en eksplisitt henvisning til overgangen mellom disse to linjene.

Selve likningen i denne oppgaven er mer i overensstemmelse med det elevene jobber med i R1, enn det de arbeider med i R2. Konteksten med å finne en feil i andres utregning er en noe uvant oppgavetype for norske elever, selv om egenvurdering og vurdering av hverandre har blitt ganske vanlig i norske klasserom. De norske resultatene er litt svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. Frankrike og Slovenia presterer godt på oppgaven, tatt i betraktning den store dekningsgraden i disse landene. Svenske elever presterer litt svakere enn de norske elevene.

Det positive i et norsk perspektiv er den klare framgangen fra 2008. Det kan tenkes flere årsaker til dette. En mulig årsak er at man de senere årene har blitt flinkere til å vedlikeholde det stoffet elevene jobber med i R1, fordi det nå er akseptert at elevene i videregående skole også kan testes til eksamen i stoff som står i læreplanen på lavere trinn. En annen mulig årsak er at det kan ha blitt mer fokus på egenvurdering og hverandrevurdering samt refleksjon og diskusjon i norsk matematikkundervisning. Det har i forbindelse med offentliggjøring av tidligere rapporter vært diskutert at det er en tendens til ensidighet i metoder i matematikk, med mye vekt på individuell oppgaveløsing og lite vekt på diskusjoner og refleksjoner (Grønmo et al., 2012; Grønmo et al., 2010).

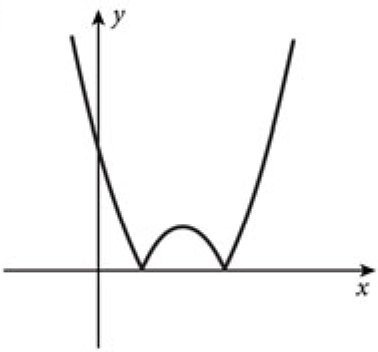
## *Algebraoppgave 8*
## *Knowing, Absolute value of parabola below x-axis*

Grafen til $y = f(x)$ er vist her.

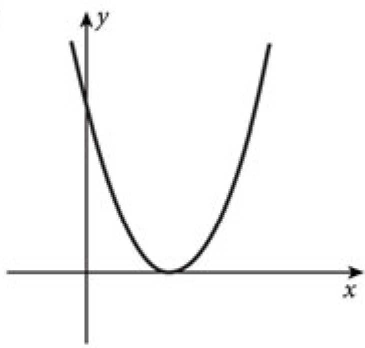



Hvilken av følgende grafer viser $y = |f(x)|$ ?

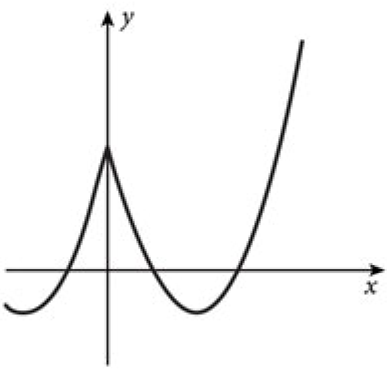
(A)



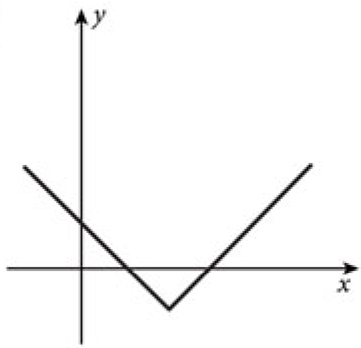

(B)




(C)




(D)



| MA33086 | A* | B | C | D | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 55 | 29 | 6 | 9 | 3 |
| Sverige | 43 | 20 | 9 | 26 | 1 |
| USA | 54 | 14 | 1 | 29 | 1 |
| Russland | 72 | 12 | 6 | 10 | 0 |
| Slovenia | 88 | 6 | 4 | 1 | 1 |
| Frankrike | 62 | 23 | 2 | 12 | 1 |
| Portugal | 86 | 7 | 2 | 5 | 0 |
| Int. gj.snitt | 66 | 18 | 5 | 11 | 1 |

Dette er en flervalgsoppgave som tester om elevene ser sammenhengen mellom grafene til $f(x)$ og $|f(x)|$. For å løse oppgaven må elevene vite at tallverdi/absoluttverdi betyr at alle verdier blir positive, det vil si at hele grafen må ligge over $x$-aksen. Det betyr at alternativ C og D ikke kan være riktige; her har grafen for den nye funksjonen både positive og negative verdier siden den ligger både over og under $x$-aksen. Man står da igjen med alternativ A eller B. En del elever velger alternativ B, som heller ikke er riktig. Disse elevene vet at tallverdien må være positiv, men de vet ikke på hvilken måte grafen endrer seg. Det riktige svaret er alternativ A, som bare har positive verdier, og hvor grafen endrer seg på riktig måte. Den delen av grafen som er under $x$-aksen for $f(x)$, blir speilet om $x$-aksen for å få grafen til $|f(x)|$.

Norge og USA presterer svakt på oppgaven, Sverige enda svakere. De øvrige landene presterer svært bra når dekningsgrad tas i betraktning, særlig gjelder det Slovenia og Portugal. Tar man med i vurderingen dekningsgraden i de ulike landene framstår altså forskjellen mellom prestasjonene i landene enda større.

Norge har over 80 % av elevene fordelt på alternativene A og B. Det indikerer at de norske elevene vet at tallverdien gir positive funksjonsverdier, men at mange ikke vet hvordan grafen endrer seg. Rundt en tredel av elevene i USA og Sverige ser ikke ut til å vite at tallverdi betyr bare positive verdier, siden en så stor del av elevene i disse landene velger feilsvarene C og D. De fleste velger D; kanskje de tror at symbolet for absoluttverdi betyr at de skal «rette ut» grafen?

På denne oppgaven, som på flere andre oppgaver i algebra, er det de nordiske og engelskspråklige landene som presterer svakt, mens østeuropeiske land presterer godt. Også dette er et resultat som samsvarer med tidligere analyser av hva som kjennetegner matematikkundervisningen i ulike land.

## *Algebraoppgave 9*
## *Knowing, Polynomials satisfying conditions*

Avgjør om hvert polynom tilfredsstiller **begge** disse to betingelsene:

- Polynomet er av grad 3
- De eneste to røttene er 3 og 5

| | Ja | Nei |
|---|---|---|
| $(x-3)^2\,(x-5)$ | ○ | ○ |
| $(x-3)^3\,(x-5)^3$ | ○ | ○ |
| $(x+3)^2\,(x+5)$ | ○ | ○ |
| $(x-3)\,(x-5)^2$ | ○ | ○ |
| $(x-5)^3$ | ○ | ○ |

I denne oppgaven skal elevene avgjøre om fem polynomer oppfyller to gitte betingelser. Elevene skal svare «Ja» eller «Nei» på spørsmålet om polynomet oppfyller betingelsene linje for linje. Vi refererer til første linje som spørsmål A), andre linje som spørsmål B), tredje linje som spørsmål C), fjerde linje som spørsmål D) og femte linje som spørsmål E). Oppgaven er i sin helhet kategorisert kognitivt som det å kunne noe. Gjettefaktor er 50 % for hvert spørsmål.

Oppgaven tester om elevene vet hva det betyr at et polynom skal være av grad 3, samtidig som de eneste to røttene skal være 3 og 5. Disse betingelsene innebærer at polynomet må ha en dobbeltrot, enten for 3 eller for 5. De to polynomene som oppfyller begge disse betingelsene, er A) og D). Vi presenterer resultatene for disse to polynomene først.

**Resultater for spørsmålene i linje A) og D)**

| MA33225A | Ja* | Nei | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 62 | 31 | 8 |
| Sverige | 60 | 35 | 6 |
| USA | 71 | 27 | 3 |
| Russland | 61 | 33 | 7 |
| Slovenia | 81 | 18 | 1 |
| Frankrike | 64 | 31 | 5 |
| Portugal | 68 | 29 | 3 |
| Int. gj.snitt | 67 | 27 | 6 |

| MA33225D | Ja* | Nei | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 61 | 31 | 8 |
| Sverige | 60 | 33 | 7 |
| USA | 71 | 26 | 3 |
| Russland | 60 | 32 | 8 |
| Slovenia | 82 | 17 | 1 |
| Frankrike | 64 | 30 | 6 |
| Portugal | 67 | 28 | 5 |
| Int. gj.snitt | 67 | 27 | 6 |

I linje A) har polynomet en dobbeltrot lik 3 og en enkeltrot lik 5. I linje D har polynomet en dobbeltrot lik 5 og en enkeltrot lik 3. Begge polynomene er av grad 3, så de to betingelsene er oppfylt, og det riktige svaret på spørsmålet er «Ja».

Det norske resultatet er litt under internasjonalt snitt for både linje A) og linje D). De to landene som presterer best, er Slovenia og USA. Aller best er Slovenia, og de er samtidig det landet som har den høyeste dekningsgraden.

**Resultater for spørsmålene i linje B), C) og E)**

| MA33225B | Ja | Nei* | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 24 | 67 | 8 |
| Sverige | 33 | 63 | 4 |
| USA | 27 | 71 | 2 |
| Russland | 31 | 62 | 8 |
| Slovenia | 13 | 85 | 2 |
| Frankrike | 23 | 72 | 5 |
| Portugal | 21 | 76 | 3 |
| Int. gj.snitt | 23 | 72 | 5 |

| MA33225C | Ja | Nei* | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 46 | 47 | 8 |
| Sverige | 24 | 70 | 6 |
| USA | 16 | 82 | 3 |
| Russland | 10 | 81 | 9 |
| Slovenia | 9 | 88 | 2 |
| Frankrike | 17 | 77 | 6 |
| Portugal | 21 | 75 | 5 |
| Int. gj.snitt | 20 | 74 | 6 |

| MA33225E | Ja | Nei* | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 20 | 72 | 8 |
| Sverige | 24 | 70 | 6 |
| USA | 9 | 88 | 3 |
| Russland | 14 | 78 | 9 |
| Slovenia | 6 | 92 | 2 |
| Frankrike | 12 | 82 | 6 |
| Portugal | 12 | 84 | 4 |
| Int. gj.snitt | 14 | 80 | 6 |

Polynomene i linje B), C) og E) oppfyller én av betingelsene, men ikke begge to. Svaret på disse tre spørsmålene blir derfor «Nei». Linje B tilfredsstiller kravet om at røttene skal være 3 og 5, men polynomet er ikke av grad 3. Polynomet i linje C) er av grad 3, men røttene er –3 og –5, ikke 3 og 5. Polynomet i linje E) er av grad 3, men har bare én trippelrot 5.

Resultatene på disse tre linjene skiller seg generelt ikke så mye fra hverandre, eller fra resultatene for linje A) og D) hvor svaret på spørsmålet var «Ja». Det eneste unntaket er norske elevers svar på linje C), hvor Norge har en klart høyere andel enn de andre landene av elever som svarer at dette polynomet oppfyller begge betingelsene. Det ser ut til at norske elever i større grad enn i andre land roter med fortegnet, de tar ikke hensyn til om det står $+$ eller $-$ i parentesene. Norske elever er vant til å faktorisere polynomer ved å finne nullpunktene. Når de da får nullpunktene $x = 3$ og $x = 5$, er det svært vanlig at de tror at faktorene skal være $(x + 3)$ og $(x + 5)$. Da er det ikke usannsynlig at de gjør samme feil når de skal resonnere den andre veien. Det kan være at elever i Norge i mindre grad enn i andre land har reflektert over sammenhengen mellom tegnet i parentesen og hvilket fortegn roten har.

Resultatet for Norge på alle de fem spørsmålene i oppgaven er svakere enn internasjonalt gjennomsnitt, og svakere enn de fleste andre landene. Spesielt på linje C) presterer de norske elevene svakere enn elevene i andre land. Det landet som gjennomgående markerer seg med gode resultater, er Slovenia, med mellom 81 % og 92 % av elevene som svarer rett på alle de fem spørsmålene. Dette samsvarer med tidligere analyser som har vist at Slovenia er et land som legger relativt stor vekt på ren matematikk som algebra på alle nivåer i skolen, noe det er rimelig å anta har ført til en dypere forståelse hos deres elever. (Jamfør diskusjonen om progresjonsproblematikk i kapittel 5.)

### *Algebraoppgave 10*
### *Reasoning, Evaluate alternating expression when $x = 3$*

Finn verdien til det algebraiske uttrykket

$$x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 99x - 100x$$

når $x = 3$.

Svar: ________________

| MA33142 | 10<br>Rett svar | 79<br>Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 23 | 56 | 21 |
| Sverige | 28 | 58 | 14 |
| USA | 30 | 63 | 7 |
| Russland | 50 | 37 | 13 |
| Slovenia | 20 | 65 | 15 |
| Frankrike | 31 | 43 | 26 |
| Portugal | 29 | 42 | 28 |
| Int. gj.snitt | 30 | 51 | 19 |

Dette er en åpen oppgave. Siden det ikke er noe krav om at elevene skal vise hvordan de kom fram til svaret, har vi ingen informasjon om hvordan elevene har tenkt. Oppgaven er kategorisert kognitivt som resonnering.

Oppgaven kan løses ved å lete etter et mønster i den alternerende følgen av algebraiske uttrykk. Første ledd $x$ vil sammen med nest siste ledd $99x$ gi $100x$, andre ledd $-2x$ vil sammen med tredje siste ledd $-98x$ gi $-100x$. Disse to summene slår hverandre ut. På samme måte kan man fortsette til man bare står igjen med $+50x$ som midterste leddet og $-100x$ som siste ledd. Slår vi disse sammen får vi $(-100x + 50x) = -50x$. Setter man her inn verdien $x = 3$, får man det riktige svaret på oppgaven, som er $-150$. Oppgaven kan også løses ved at elevene slår sammen to og to etterfølgende ledd, og får $-x$ hver gang, totalt 50 ganger. Svaret blir igjen $-50x$, som blir $-150$ når $x = 3$.

Elevene må selv resonnere seg fram til et mønster i den alternerende rekken av algebraiske uttrykk; de har ikke noen formel de kan bruke for å finne løsningen. Oppgaven stiller krav til det vi kan kalle abstrakt resonnering og mønstergjenkjenning. Elevene i Norge er vant til både endelige og uendelige rekker, men har antakelig lite erfaring med alternerende rekker der de selv må finne et mønster. Ifølge læreplanen i R2 skal elevene kunne behandle rekker som ikke er geometriske eller aritmetiske («summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler»), men dette blir trolig mindre vektlagt da det sjelden gis til eksamen. Oppgaven faller relativt vanskelig ut i de fleste land, men tar man hensyn til dekningsgraden, framstår det norske resultatet som det aller svakeste. Russlands resultat er best, særlig hvis vi tar med i vurderingen at deres elever er noe yngre enn elevene i de andre landene. Også Portugal og Frankrike presterer ganske bra, hvis man tar hensyn til den relativt høye dekningsgraden i disse landene.

## *Algebraoppgave 11*
## *Applying, Sum of geometric series alternating signs*

Hva er summen av denne geometriske rekken?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$$

Ⓐ $2$

Ⓑ $\frac{3}{2}$

Ⓒ $\frac{2}{3}$

Ⓓ $-\frac{1}{3}$

| MA33044 | A | B | C* | D | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 13 | 18 | 51 | 13 | 6 |
| Sverige | 14 | 17 | 45 | 18 | 6 |
| USA | 12 | 20 | 48 | 16 | 5 |
| Russland | 13 | 17 | 53 | 14 | 3 |
| Slovenia | 14 | 20 | 44 | 12 | 10 |
| Frankrike | 16 | 22 | 40 | 14 | 9 |
| Portugal | 12 | 24 | 38 | 15 | 12 |
| Int. gj.snitt | 14 | 20 | 42 | 14 | 10 |

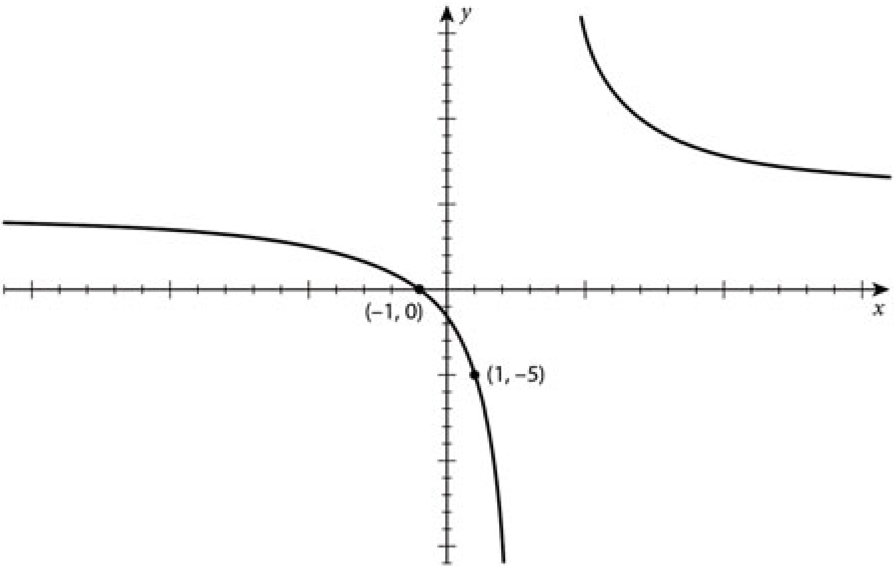
Norske elever presterer relativt bra på denne flervalgsoppgaven sammenliknet med andre land i studien. Russland ligger enda litt høyere.

Elevene skal her anvende kunnskaper om geometriske rekker og potenser for å finne det riktige alternativet. Formelen for å beregne summen av en geometrisk rekke står innledningsvis i de heftene elevene får. I gjennomgangen før elevene begynner å løse oppgaver gjøres elevene oppmerksomme på de formlene som står der, og som de kan benytte seg av når de løser oppgavene. Elevene må vite at et tall opphøyd i 0-te potens gir 1 for alle tall forskjellig fra 0, det betyr at det første leddet i rekken er 1. Kvotienten til den uendelige geometriske rekken er $-\frac{1}{2}$. Da skal elevene vite at rekken konvergerer, og at de kan bruke formelen for summen av en konvergent geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = -\frac{1}{2}$: $s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$. Riktig svar er alternativ C.

Valg av feilsvar fordeler seg på de ulike svaralternativene i alle land, med en liten overvekt på alternativ B. Problemet for de elevene som har valgt alternativ B) kan være at de gjør en feil når de skal beregne $\frac{1}{3/2}$ . Feilsvaret A kan man få ved å gjøre en fortegnsfeil; ved å bruke $k = \frac{1}{2}$ i stedet for $k = -\frac{1}{2}$ blir svaret 2. Feilsvar D får elevene dersom de velger $a_1 = -\frac{1}{2}$, det vil si at de ser bort fra at uttrykket er opphøyd i 0-te, men da er det ikke lenger en geometrisk rekke!

Oppgaven går rett inn i det som er pensum i R2, og den passer godt med hva norske elever er vant til å testes i på prøver og eksamener. At de har fått oppgitt formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke kan trolig ha gitt dem god hjelp, og også at det står oppgitt at rekken er geometrisk.

## *Algebraoppgave 12*
## *Applying, Solve for 2 rational coefficients given 2 points*




Grafen til funksjonen $f(x) = \dfrac{ax+5}{x+b}$ er vist over. Finn verdiene til $a$ og $b$.

$a =$ ________________

$b =$ ________________

| MA33179 | 10<br>Både *a* og *b* | 70<br>Bare *a* | 71<br>Bare *b* | 79<br>Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 22 | 15 | 2 | 38 | 23 |
| Sverige | 18 | 12 | 2 | 48 | 21 |
| USA | 26 | 16 | 1 | 48 | 9 |
| Russland | 41 | 14 | 1 | 23 | 22 |
| Slovenia | 34 | 28 | 0 | 30 | 8 |
| Frankrike | 26 | 14 | 1 | 34 | 26 |
| Portugal | 31 | 20 | 2 | 32 | 16 |
| Int. gj.snitt | 33 | 16 | 1 | 32 | 18 |

Dette er en åpen oppgave. Siden det ikke er noe krav om at elevene skal vise hvordan de fant svaret, mangler vi informasjon om hvordan de har løst den. Kognitivt er oppgaven kategorisert som anvendelse av kunnskap.

I oppgaven får elevene vist grafen til en funksjon samt funksjonsuttrykket for denne. På grafen er det tegnet inn to punkter hvor koordinatene er oppgitt. Ved å sette inn de to kjente punktene i funksjonsuttrykket, vil man få to likninger med to ukjente, som man så kan løse med hensyn på de to størrelsene $a$ og $b$ som det spørres etter. Riktig svar er $a = 5$ og $b = -3$. Elevene har fått kode 70 hvis de bare fant verdien $a = 5$, og kode 71 hvis de bare fant $b = -3$. I alle land i studien er det en relativt stor andel av elevene som finner den riktige verdien for $a$, men ikke verdien for $b$. Det er fordi elevene ser at funksjonen har et nullpunkt for $x = -1$, og da må $a = 5$ for at telleren skal bli 0. Vi tror at noen elever vil tenke på hvilke asymptoter denne funksjonen har når de skal finne $a$ og $b$. De vet at vertikal asymptote finnes ved å sette nevneren lik 0, altså $x = -b$ og horisontal asymptote er $y = \frac{a}{1} = a$.

I Norge er brøkfunksjoner en del av læreplanen i 1T og R1, men ikke i R2. Likevel er det litt overraskende at det norske resultatet er såpass svakt, klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet. Norge og Sverige har begge et svakere resultat enn de landene vi sammenlikner med, og enda svakere framstår dette resultatet hvis man tar med i vurderingen at flere av landene har en langt høyere andel av årskullet med i studien. Portugal med godt over dobbelt så høy dekningsgrad som Norge presterer klart bedre, det samme gjør Slovenia med over tre ganger så høy dekningsgrad. Russland har tilnærmet samme dekningsgrad som Norge, men andelen som løser oppgaven, er nesten dobbelt så høy som i Norge.

Dette er et eksempel på en algebraoppgave som ikke er veldig komplisert, men som krever en viss elementær forståelse av algebra. Den krever også at elevene vet at de kan få fram to likninger med to ukjente ved å sette inn de to kjente punktene på grafen. Hvis de ikke ser det, er det vanskelig å vite om det er algebraen de ikke klarer, eller om det er mangel på evne til å utnytte opplysningene i oppgaven som er problemet. Hvilke land som presterer godt på oppgaven, samsvarer også med tidligere analyser som viser langt mer vekt på algebra i østeuropeiske land som Russland og Slovenia. Lav prioritering av algebra i norsk skole tas også opp og drøftes spesielt i kapittel 6 i denne boka.

## *Algebraoppgave 13*
## *Knowing, Simplify log exponent using inverses*

Skriv $10^{\log_{10} m}$ enklere, der $m > 0$.

Svar: ____________________

| MA33008 | 10<br>Rett svar | 79<br>Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|
| Norge | 11 | 64 | 25 |
| Sverige | 18 | 51 | 31 |
| USA | 34 | 47 | 18 |
| Russland | 76 | 11 | 13 |
| Slovenia | 26 | 46 | 28 |
| Frankrike | 78 | 13 | 10 |
| Portugal | 57 | 23 | 19 |
| Int. gj.snitt | 39 | 36 | 25 |

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er oppgaven kategorisert på nivå å kunne; den tester om elevene har grunnleggende faktakunnskaper om logaritmer, som definisjon av logaritme og kunnskap om inverse funksjoner.

I denne oppgaven har man logaritmer med grunntall 10 (såkalt briggske logaritmer). En måte å definere logaritmen til et tall $x$ med grunntall 10 på, er å si at det er den inverse funksjonen til $10^x$, eller man kan definere logaritmen til et tall med grunntall 10 som det tallet 10 må opphøyes i for å få det opprinnelige tallet. I denne oppgaven skal grunntallet 10 opphøyes i logaritmen til $m$ med grunntall 10. Det gitte uttrykket i oppgaven kan da forenkles til $m$, som er riktig svar på oppgaven.

Her skiller Norge seg ut ved å prestere svært svakt, svakere enn alle landene vi sammenlikner med, og langt under det internasjonale gjennomsnittet. Sverige gjør det også svakt, men ikke like svakt som Norge. Det svake resultatet tyder på manglende forståelse av logaritmer hos norske elever. Én mulig årsak er at de ikke kjenner definisjonen av logaritme godt nok. Det er også mulig at noen elever blir usikre fordi logaritmer med grunntall 10 i Norge vanligvis skrives som lg. Vi tror at symbolbruken kompliserer oppgaven for norske elever. Hvis det hadde stått $10^{\lg m}$, tror vi at langt flere norske elever hadde svart $m$. Norske elever er ikke vant til skrivemåten $\log_g a$, og de bruker nesten utelukkende briggske logaritmer og naturlige logaritmer med notasjon henholdsvis $\lg x$ og $\ln x$.

Elever i Frankrike, Russland og Portugal presterer godt på oppgaven. Én mulig årsak til de store ulikhetene mellom land som vi ser på denne oppgaven, kan være i hvilken grad man legger stor eller liten vekt på å jobbe med definisjoner og bruk av symboler, både når det gjelder logaritmer og mer generelt. Dette er en oppgave der en relativt stor andel ikke har svart på oppgaven, og det gjelder i alle land. I Norge er det 25 % som ikke har svart, det samme som internasjonalt gjennomsnitt for å ikke svare.

## *Algebraoppgave 14*
## *Applying, Find a value of two functions' intersections*

La $a$ være en konstant ulik 0. Finn de to $x$-verdiene der grafene til $y = 10^6 ax$ og $y = \frac{x^2}{10^6}$ skjærer hverandre.

Svar: ______________________________

| MA33121 | 20 Begge verdiene | 10 Bare $x = 0$ | 11 Bare $x = 10^{12}a$ | 79 Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 11 | 15 | 11 | 26 | 38 |
| Sverige | 9 | 10 | 10 | 34 | 37 |
| USA | 7 | 22 | 16 | 42 | 13 |
| Russland | 35 | 13 | 3 | 15 | 33 |
| Slovenia | 26 | 9 | 17 | 37 | 12 |
| Frankrike | 8 | 11 | 11 | 29 | 41 |
| Portugal | 13 | 12 | 15 | 28 | 32 |
| Int. gj.snitt | 20 | 12 | 12 | 27 | 29 |

Dette er en åpen oppgave. Oppgaven er kategorisert kognitivt som anvendelse. Elevene skal anvende sine algebraiske kunnskaper til å beregne $x$-verdiene for skjæringspunkter mellom grafene til to funksjoner.

For å få full uttelling på oppgaven måtte elevene finne begge de aktuelle $x$-verdiene, og de fikk da kode 20. Hvis de bare fikk én $x$-verdi riktig, fikk de enten kode 10 eller 11, avhengig av hvilken $x$-verdi de fant. Løsningen $x = 0$ framstår som den som er enklest å finne. Den kan, med noe innsikt i algebraiske likninger, løses bare ved å se på uttrykkene; man trenger strengt tatt ikke å gjøre noen utregning. Å finne den andre løsningen, $x = 10^{12}a$, krever at elevene har noe kunnskap om manipulering av algebraiske uttrykk og en viss forståelse av abstrakt algebra. Det ser imidlertid ut som om elevene fant det omtrent like vanskelig å finne disse løsningene. Vi tror at grunnen til dette kan være at elevene har delt på $x$, og glemt at de da mister løsningen $x = 0$. Det er et gjennomgående mønster både internasjonalt og i flere av landene at det er ganske jevnt hvor stor andel av elevene som får kode 10 og som får kode 11.

Siden elevene ikke ble bedt om å vise hvordan de fant fram til løsningene, har vi ikke informasjon om hvilken framgangsmåte de har brukt. Det er interessant å merke seg at i mange land er det en relativt stor andel som ikke har svart på oppgaven, i Frankrike, Norge og Sverige omtrent 40 %. Internasjonalt gjennomsnitt for å ikke svare er nesten 30 %.

Selv om oppgaven ikke framstår som veldig komplisert, falt den ut ganske vanskelig i de fleste landene. Det internasjonale gjennomsnittet for helt riktig svar var 20 %, mens én av fire elever internasjonalt fant én av de to løsningene. Norge, Sverige og USA presterer svakt på oppgaven, særlig når vi tar med i vurderingen at disse landene tester en relativt liten andel av sine årskull. Det landet som presterer best, er Russland. Slovenias prestasjon er også god, tatt i betraktning at de har med over 30 % av sitt årskull på dette nivået i matematikk.

### *Algebraoppgave 15*
### *Applying, Compare car rental plans X and Y*

To ulike planer for bilutleie er gitt i tabellen under.

| Utleieplan | Startpris | Pris per kilometer |
|---|---|---|
| X | 100 zed | 0,07 zed |
| Y | 250 zed | 0,02 zed |

A. Etter hvor mange kilometer blir Plan Y den billigste planen?

Vis arbeidet ditt.

B. Dersom en ekstra forsikringspremie på 100 zed legges til i begge planer, endrer dette antall kilometer som må kjøres før Plan Y blir billigst?

Forklar svaret ditt.

| MA33240 | 20<br>Både<br>A og B | 10<br>Bare A | 11<br>Bare B | 79<br>Feil svar | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 39 | 22 | 3 | 19 | 17 |
| Sverige | 16 | 38 | 1 | 29 | 16 |
| USA | 35 | 22 | 5 | 31 | 7 |
| Russland | 30 | 10 | 6 | 22 | 32 |
| Slovenia | 28 | 8 | 11 | 33 | 20 |
| Frankrike | 52 | 9 | 6 | 17 | 16 |
| Portugal | 29 | 12 | 4 | 24 | 32 |
| Int. gj.snitt | 30 | 14 | 6 | 24 | 25 |

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som anvendelse av kunnskap; elevene forventes å bruke sine kunnskaper i algebra til å løse et problem presentert i en hverdagskontekst. I første del av oppgaven (del A) skal elevene vurdere to ulike tilbud for leie av bil og finne ut hvor mange kilometer man må kjøre før det ene tilbudet blir rimeligere enn det andre. Denne første delen kan løses ved å sette opp en likning eller ved å sette opp en ulikhet som man løser for å kunne sammenlikne de to tilbudene. Kravene til algebraisk manipulasjon for å finne riktig løsning er lik i begge tilfellene. Oppgaven kan også løses ved å tegne grafene for de to tilbudene, enten for hånd eller ved hjelp av en grafisk kalkulator, og se hvor de krysser hverandre. En riktig løsning gir svaret 3000 kilometer på del A.

I andre del av oppgaven (del B) skal elevene vurdere om det får noen betydning for svaret i del A hvis det legges til en fast ekstrakostnad i begge tilbudene. Det er det samme som å spørre om løsningen av den likningen eller ulikheten man eventuelt brukte i del A vil bli påvirket om man legger til samme tall på høyre og venstre side. Det riktige svaret på det er nei. Som fullgod begrunnelse var det tilstrekkelig at elevene svarte at det ikke hadde noen betydning for antall kilometer siden man la til samme faste kostnad i begge tilbudene.

Hvis elevene har svart riktig på spørsmålene i både del A og del B, får de kode 20. Har de kun del A rett, får de kode 10. Kode 11 er for de elevene som bare svarer rett på del B. Elever som bare får del B) rett, kan antas å ha en generell forståelse av hvilken betydning det har at man legger til et fast beløp på begge sider i en likning eller ulikhet, mens de mangler de kunnskapene de trenger for å sette opp en slik likning eller ulikhet i en kontekst som i denne oppgaven. De som bare har del A) riktig, vet hvordan de skal gå fram for å sette opp og løse en likning eller ulikhet i en slik kontekst, mens de mangler en generell forståelse av hva det innebærer å legge til det samme tallet på begge sider av en likning eller ulikhet.

Dette er en algebraoppgave hvor norske elever presterer bra sammenliknet med andre land i studien. Nesten 40 % av de norske elevene får full uttelling på oppgaven. Det er bare Frankrike som har en større andel elever med riktig svar, over 50 %. Dette er en oppgavetype som passer godt inn med hva norske elever er vant til å få. Også USA gjør det relativt godt på oppgaven, nesten like godt som Norge. Begge landene har omtrent samme dekningsgrad. Det er også ganske lik andel i begge land når det gjelder andelen som får enten bare første del eller bare andre del rett.

Det landet som utmerker seg med svakest prestasjonen, er Sverige. De har den laveste andelen elever med full uttelling på oppgaven, og den høyeste andelen elever som bare greier første del av oppgaven. Også i Norge er det en relativt stor andel elever, over 20 %, som bare greier første del. Norske elever presterer langt bedre enn de svenske elevene på denne oppgaven; nærmere 40 % av elevene i Sverige fikk bare til første del.

### *Algebraoppgave 16*
### *Reasoning, Find a and b for equation given asymptotes*

Grafen til funksjonen $f(x)=\dfrac{ax+5}{x+b}$ har asymptoter $x=-2$ og $y=7$.
Hva er verdiene til $a$ og $b$?

Ⓐ $a=-2, b=7$

Ⓑ $a=-7, b=2$

Ⓒ $a=2, b=7$

Ⓓ $a=7, b=2$

| MA33050 | A | B | C | D* | Ikke svart |
|---|---|---|---|---|---|
| Norge | 20 | 27 | 12 | 31 | 10 |
| Sverige | 13 | 30 | 18 | 29 | 11 |
| USA | 12 | 26 | 12 | 45 | 6 |
| Russland | 19 | 23 | 21 | 29 | 9 |
| Slovenia | 17 | 19 | 17 | 37 | 10 |
| Frankrike | 20 | 18 | 14 | 34 | 14 |
| Portugal | 15 | 12 | 13 | 53 | 7 |
| Int. gj.snitt | 17 | 20 | 15 | 38 | 11 |

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal ved å bruke sine kunnskaper om asymptoter til brøkfunksjoner resonnere seg fram til hvordan de kan løse oppgaven. Elevene får oppgitt at den gitte funksjonen har en (vertikal) asymptote for $x = -2$ og en (horisontal) asymptote for $y = 7$. Den horisontale asymptoten kan man finne ved å se på grenseverdien for funksjonen når $x$ går mot uendelig. Norske elever har dessuten lært at de kan ta tallet foran $x$ i teller og dele med tallet foran $x$ i nevner for å finne horisontal asymptote, uten at de nødvendigvis har noen forståelse av hvorfor det er riktig. Man vil da få at funksjonen går mot verdien $a$. Det betyr at $y = a$ er en horisontal asymptote, som det er oppgitt i oppgaven at er lik 7. Elevene skal vite at den vertikale asymptoten er gitt ved den $x$-verdien som gjør nevneren lik 0. Nevneren er 0 når $x = -b$. I oppgaven er det oppgitt at denne asymptoten er $x = -2$, med andre ord er $b = 2$. Det betyr at alternativ D) er det riktige svaret på oppgaven.

Elever i Norge og Sverige presterer ganske likt på denne oppgaven, og relativt svakt sammenliknet med de fleste andre landene. Portugal er landet med best prestasjon på oppgaven, særlig hvis man tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden der. Tar man dekningsgraden med i vurderingen av landenes prestasjoner, er de også relativt gode i Slovenia og Frankrike.

Dette er stoff som det i Norge arbeides mest systematisk med i 1T og R1. De relativt svake norske resultatene kan skyldes dårlig vedlikehold av tidligere innlært stoff, selv om man nå i større grad enn tidligere åpner for at elevene, også til eksamen, kan testes i stoff fra kurs på lavere trinn. Dette er særlig viktig i et hierarkisk fag som matematikk, hvor tidligere innlært stoff ofte har stor betydning for videre læring av nytt stoff.

## Avsluttende kommentarer

Resultatene på oppgavene i algebra illustrerer at norske elever generelt presterer svakere i algebra enn elever i de fleste andre land.

På de tre oppgavene som var med i alle TIMSS Advanced-studiene, er det en jevn tilbakegang i prestasjoner for norske elever, først fra 1998 til 2008 og så fra 2008 til 2015. For de fire oppgavene som var med i TIMSS Advanced i 2008 og 2015, er bildet mer sammensatt. På to av oppgavene er det framgang i de norske elevenes prestasjoner, mens det ikke er noen endring på én oppgave, og tilbakegang på en annen oppgave. Hovedandelen av oppgaver var nye i TIMSS Advanced 2015. På de aller fleste av disse oppgavene var norske elevers prestasjoner svakere enn resultatene for elevene i de fleste andre landene. I ett land, Sverige, var tendensen at deres elever presterte enda svakere enn de norske elevene.

Resultatene på flere av oppgavene understøtter det som mange tidligere analyser har vist i mange ulike studier og på mange ulike nivåer i skolen. Land i Norden legger relativt liten vekt på å lære elevene algebra, mens det motsatte er tilfellet for land i Øst-Europa (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013; Grønmo et al., 2004; Olsen & Grønmo, 2006). (Se også kapittel 6 for mer om vektlegging av algebra i ulike land.)

Lite vekt på algebra er problematisk, spesielt fordi det er det matematiske språket som mange av elevene vil trenge for videre studier og yrker. Algebra innebærer også manipulering av symboler. Norske lærebøker og læreplaner tenderer til å «skåne» elevene for utstrakt bruk av symboler, både i algebra, i definisjoner og i matematiske tekster. Dette er å gjøre elevene en bjørnetjeneste når det gjelder å forberede dem til høyere utdanning i fag som krever matematikk. Det gjelder både realfag, økonomiske fag, helsefag, samfunnsfag og til og med humanistiske fag, der man av og til bruker kvantitativ analyse som verktøy. (Se også kapittel 12.)