Prioritering og progresjon i skolematematikken

Prioritering og progresjon i skolematematikken

En nøkkel til å lykkes i realfag

Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier

Liv Sissel Grønmo og Arne Hole (red.)

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

Boka er utgitt med støtte fra Universitetet i Oslo ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS).

ISBN: 978-82-02-58528-0-PDF

Typesetting: Gamma grafisk AS (Vegard Brekke)
Cover Design: Cappelen Damm
Forsideillustrasjon: Elisabeth Vold Bjone

Cappelen Damm Akademisk/NOASP
noasp@cappelendamm.no

Forord

I denne vitenskapelige antologien presenteres forskningsresultater om skolematematikk basert på data fra TIMSS Advanced, TIMSS og PISA fra 1995 til 2015. TIMSS- og TIMSS Advanced-studiene er gjennomført i regi av organisasjonen IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Studien ledes av forskere ved Boston College i USA, mens sekretariatet for IEA ligger i Amsterdam i Nederland. PISA-studien er organisert i regi av OECD.

TIMSS-gruppen ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo tok i 2005 et initiativ overfor ledelsen i IEA med sikte på en ny studie av elever i slutten av videregående skole. En slik studie var blitt gjennomført i 1995, og formålet med en ny studie var å kunne studere utviklingen over tid. Studien fikk navnet TIMSS Advanced og ble gjennomført på nytt i 2008 og i 2015. Liv Sissel Grønmo ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo var prosjektleder for TIMSS Advanced i 2008 og 2015.

Denne boka tar utgangspunkt i matematikkresultater i TIMSS Advanced-studiene. Men basisen for elevenes matematikkompetanse legges i grunnskolen, og det er derfor naturlig å drøfte resultatene siste året i videregående skole i relasjon til hva elevene har lært eller ikke lært på tidligere trinn i skolen. I boka presenteres derfor resultater fra analyser av data fra TIMSS-studiene på barnetrinn og ungdomstrinn, og fra PISA-studien på ungdomstrinnet.

I utarbeidelsen av forskningsartiklene i boka har det vært et nært samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo, forskere ved Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo, lærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus og en forsker ved Matematikksenteret ved NTNU i Trondheim.

Forlaget har hatt ansvaret for at manuskriptet har blitt fagfellevurdert av personer med relevant forskningskompetanse. Vi takker alle disse for nyttige bidrag i prosessen. Vi takker dessuten forlagets språkkonsulent. Vi har også hatt stor nytte av faglige drøftinger med kollegaer nasjonalt og internasjonalt. En stor takk til alle elevene, lærerne og rektorene som har deltatt i de internasjonale studiene.

Oslo, november 2017
Liv Sissel Grønmo og Arne Hole

Innhold

Forord ... 5

1 Introduksjon ... 11
Liv Sissel Grønmo og Arne Hole
1.1 Problemstillinger og bakgrunn for boka ... 11
1.2 Om de videre kapitlene i boka ... 14

2 Matematikkinnholdet i TIMSS, TIMSS Advanced og PISA ... 17
Arne Hole, Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad
2.1 Prinsipielle ulikheter i rammeverk mellom TIMSS-studiene og PISA ... 18
2.2 Språk og innhold i skolematematikken: Funnet på og funnet ut ... 20
2.3 LC-rammeverket ... 22
2.4 Matematikkinnhold i TIMSS, PISA og TIMSS Advanced målt med LC-rammeverket ... 24
2.5 Forskjeller i studienes innhold ... 29

3 Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA ... 31
Liv Sissel Grønmo, Arne Hole og Torgeir Onstad
3.1 Introduksjon ... 31
3.2 Hovedresultater i TIMSS Advanced siste året i videregående skole ... 33
3.3 Hovedresultater fra TIMSS på barnetrinn og ungdomstrinn ... 38
3.4 Hovedresultater fra PISA på ungdomstrinnet ... 41
3.5 Avsluttende kommentarer ... 44

4 Et matematikkdidaktisk perspektiv ... 45
Liv Sissel Grønmo
4.1 Legitimering av faget i skolen – matematikk for alle ... 45
4.2 Innholdet i skolematematikken ... 48
4.3 Vektlegging av faglig innhold i ulike land ... 55
4.4 Undervisning i matematikk i skolen ... 57
4.5 Avsluttende kommentarer ... 61

5 Prestasjonsprofiler og undervisning i ulike land 63
Arne Hole og Marie Vaksvik Draagen
5.1 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS 2011 matematikk 64
5.2 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS Advanced 2015 matematikk og fysikk 68
5.3 Progresjon og prioritering i ulike land: Singapore og Norge som eksempel 73
5.4 Oppsummering 78

6 Prioritering og nedprioritering av fagområder i matematikk 79
Liv Sissel Grønmo, Arne Hole og Ingvill Merete Stedøy
6.1 Norske elevprestasjoner i videregående skole 80
6.2 Norske elevers prestasjoner på ulike fagområder i TIMSS på ungdomstrinnet 83
6.3 Norske elevers prestasjoner på ulike fagområder på barnetrinnet ... 90
6.4 Resultater fra norsk lærerutdanning 92
6.5 Avsluttende kommentarer 93

7 Norsk skole og elever med talent eller spesiell interesse for matematikk 95
Liv Sissel Grønmo og Inger Christin Borge
7.1 Innledning 96
7.2 Elever på kognitive kompetansenivåer i slutten av videregående skole 98
7.3 Elever på kognitive kompetansenivåer på ungdomstrinnet 103
7.4 Elever på kognitive kompetansenivåer på barnetrinnet 108
7.5 Oppsummering og avsluttende kommentarer 113

8 Oppgaver i algebra fra TIMSS Advanced 2015 117
Liv Sissel Grønmo, Ingvill Merete Stedøy og Arne Hole

9 Oppgaver i kalkulus fra TIMSS Advanced 2015 149
Liv Sissel Grønmo, Siren Røst Veflingstad og Tor Espen Hagen

10 Oppgaver i geometri fra TIMSS Advanced 2015.................. 177
Liv Sissel Grønmo , Inger Christin Borge og Arne Hole

11 Et praksisperspektiv: Bruk av TIMSS Advanced i matematikkundervisningen 201
Ingvill Merete Stedøy, Inger Christin Borge og Liv Sissel Grønmo
11.1 Relevans av TIMSS Advanced for matematikkundervisningen..... 201
11.2 Forslag til bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i programfagene R1 og R2.. 204
11.3 Bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i grunnskolen og ved starten av videregående skole............................. 227
11.4 Avsluttende kommentarer 238

12 Et universitetsperspektiv på matematikk i TIMSS Advanced...... 239
Inger Christin Borge og Arne Hole
12.1 Overgangsproblemene 240
12.2 Bakgrunnskunnskaper og universitetsmatematikk................. 241
12.3 Noen UH-relevante oppgaver fra TIMSS Advanced 246
12.4 Oppsummering og avsluttende kommentarer..................... 255

13 Oppsummering og drøfting av hovedfunn......................... 257
Liv Sissel Grønmo, Arne Hole og Inger Christin Borge
13.1 Introduksjon – matematikk for alle.............................. 257
13.2 Prioritering av innhold i matematikk i skolen 258
13.3 Progresjon i matematikk i skolen................................ 263
13.4 Deltakelse i internasjonale studier 265
13.5 Avsluttende kommentarer – kan vi lykkes i matematikk (og realfag)?......................... 267

14 Rammeverk og metoder 271
Torgeir Onstad og Liv Sissel Grønmo
14.1 Hva er TIMSS Advanced? 271
14.2 Rammeverk og instrumenter...................................... 278
14.3 Gjennomføring... 291

Appendiks 301
Formelliste i oppgaveheftene i matematikk 301

Referanser 305

Om forfatterne 315

KAPITTEL 1

Introduksjon

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Denne boka handler om matematikk i norsk skole i et bredt nasjonalt og internasjonalt perspektiv. Boka tar utgangspunkt i resultater fra TIMSS Advanced 2015, som er en internasjonal komparativ studie av elever som har valgt full fordypning i matematikk det siste året i videregående skole. Det er naturlig å drøfte hvordan elevene presterer i matematikk i slutten av videregående skole i relasjon til hva elevene har lært eller ikke lært på tidligere trinn i skolen. I 2015 ble også TIMSS for grunnskolen gjennomført, og Norge deltok med populasjoner på 4. og 5. trinn i barneskolen og på 8. og 9. trinn på ungdomsskolen. Norske elever ble også testet på 10. trinn i PISA i 2015. De mange studiene av matematikkompetanse hos norske elever som ble gjennomført i 2015, gir oss mulighet til å få et bredt bilde av den aktuelle situasjonen i skolen. Vi har også tilgang til mye data fra tidligere TIMSS Advanced-, TIMSS- og PISA-studier. Tilgangen på rike datasett over tid og på mange nivåer i skolen gir oss en unik mulighet til å drøfte de problemstillingene vi reiser. I alle disse studiene deltar det mange land, og de norske resultatene kan derfor drøftes i et bredt internasjonalt perspektiv. Målet med boka er å bruke et bredest mulig bakgrunnsmateriale for å beskrive og drøfte skolematematikken i Norge.

1.1 Problemstillinger og bakgrunn for boka

Det har vært til dels mye diskusjon om de store internasjonale studiene som Norge deltar i, særlig når nye resultater presenteres. Likevel savner vi analyser og drøftinger som konsentrerer seg mer om *det faglige innholdet* i disse studiene: Hva vi kan lære av studiene med relevans for *prioriteringer av faglig innhold* i skolen? Hvordan få til en *god progresjon* i læringen av matematikk i skolen? Vi gleder oss hvis vi kan måle framgang i norske resultater, men som forskere er vi opptatt av ulike typer analyser som kan gi oss mest mulig informasjon om hvordan vi kan bedre matematikkundervisningen framover.

Sentrale problemstillinger for boka er:

- Hvilket matematikkfaglig *innhold* legges det mye og lite vekt på at norske elever skal lære seg gjennom skoleløpet fra barneskole til slutten av videregående skole?
- Hvilken *progresjon* legges det opp til i matematikk gjennom skoleløpet fra barneskole til slutten av videregående skole?
- Hvilke *faglige prioriteringer* peker seg ut som viktige hvis vi vil satse på å gi elevene bedre kunnskaper i matematikk framover?
- Hvilke *utviklingstrender* ser vi over de 20 årene som Norge har deltatt i internasjonale komparative studier?

Skolen har mange ulike mål, men det sentrale for undervisningen i matematikk er likevel hvor mye faglig lærdom elevene får av den typen de vil trenge videre i dagligliv, i utdanninger og i yrker. Vi har derfor i denne boka lagt hovedvekten på analyser som har *en faglig synsvinkel.* Ikke fordi denne typen analyser gir oss enkle svar på veien videre, virkeligheten er for kompleks til det. Hensikten er å reise en debatt om hva elevene lærer, og om hva de trenger å lære i et samfunn i stadig utvikling. Vi trenger en grundigere debatt om innhold og læringsmål i matematikk i Norge. Ikke minst med sikte på den revisjonen som nå pågår av læreplanene, er dette viktig.

Mange land deltar i alle de internasjonale komparative studiene. Det gir oss en mulighet til å drøfte alle de problemstillingene vi reiser i et bredt internasjonalt perspektiv. Et underliggende premiss for de problemstillingene vi tar opp, er matematikkens legitimitet som skolefag: Hvorfor skal elevene lære matematikk, og hvilke behov for å lære matematikk har elevene? For mer om dette, se kapittel 4. Vi ønsker å legge opp til en bred debatt om matematikkens plass i skolen, om innholdet i faget og om organisering av undervisningen, med sikte på å gi elevene et best mulig utgangspunkt for bruk av matematikk i dagliglivet, samtidig som man har klart for seg at i dagens samfunn er det minst like viktig å gi elevene den kunnskapen de trenger for videre studier og yrker. Dette er også viktig i et bredere samfunnsperspektiv. Hvilken type kunnskap trenger samfunnet at elevene får i skolen, slik at man har tilgang på personer med den kompetansen samfunnet etterspør?

Alle de ovenfor nevnte problemstillingene vil vi analysere og drøfte i et bredt internasjonalt perspektiv. For oversiktens skyld sammenlikner vi i en del tilfeller de norske resultatene med et utvalg av land, det vi kaller referanseland. Landene er valgt for å få et bredest mulig internasjonalt perspektiv som bakgrunn for å diskutere de norske resultatene. Vi har lagt vekt på å få med land med ulike profiler for hva de vektlegger av innhold i matematikk i skolen. For mer om ulike profiler i land, se kapittel 4 og 5.

Rammeverket til både TIMSS Advanced og TIMSS er basert på en konsensus mellom de deltakende landene om hva som er viktig matematisk kunnskap slik det nedfeller seg i landenes læreplaner. Se for eksempel rammeverkene beskrevet på https://timssandpirls.bc.edu/. TIMSS på barnetrinn og ungdomstrinn tester elevene med oppgaver i tradisjonell, ren matematikk innen tall og algebra, og i oppgaver som går på anvendelse av matematisk kunnskap i mer hverdagsaktuelle kontekster. Norge har deltatt systematisk i TIMSS-studien for grunnskolen i 1995, 2003, 2007, 2011 og 2015. PISA-studien på ungdomstrinnet undersøker 15 år gamle elevers prestasjoner i det de definerer som *mathematical literacy* (OECD, 2013). Rammeverket i PISA baserer seg ikke på de deltakende landenes læreplaner, men på hva en gruppe eksperter har definert som nødvendig allmennkunnskap i et moderne samfunn, og oppgavene presenteres med lengre tekster i det vi kan kalle en type dagliglivskontekst eller annen type virkelighetskontekst (OECD, 2013). Ingen oppgaver i PISA tester elevene i tradisjonell, ren matematikk slik som det gjøres i TIMSS og TIMSS Advanced-studiene. For mer om hva som testes i de ulike studiene, henviser vi til kapittel 2. PISA-studien er blitt gjennomført i 2000, 2003, 2006, 2009, 2012 og 2015.

I utarbeidelsen av boka har vi hatt et nært samarbeid med Lillestrøm videregående skole i Skedsmo kommune. Dette er et samarbeid vi har utviklet over flere år, og som har vist seg å være positivt for skrivingen av boka. Vår erfaring er at lærere i skolen er en verdifull ressurs i den type skoleforskning vi driver med. Vi har hatt god støtte fra ledelsen ved Lillestrøm videregående skole, og vi har hatt et tett samarbeid med flere lærere i matematikk, fysikk, kjemi og biologi på skolen. Noen av disse lærerne er med som forfattere av kapitler i boka.

Vi har også hatt et godt samarbeid med Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo. Instituttet har gitt oss tilgang på data som vi trengte for å se på og analysere overgangen mellom videregående skole og universitetet. Kapittel 12 bygger på erfaringer både fra skoleforskning ved ILS og fra undervisning av nye studenter ved Matematisk institutt.

1.2 Om de videre kapitlene i boka

Kapittel 2 gjør en analyse av det matematiske innholdet som studiene TIMSS Advanced, TIMSS og PISA tester elevene i. Analysen er basert på et rammeverk som måler i hvilken grad de faglige oppgavene som gis i testene, involverer matematisk teori. **Kapittel 3** gir et sammendrag av noen av hovedresultatene fra TIMSS Advanced, TIMSS og PISA i 2015. I kapitlet presenteres også resultater som viser utviklingen over tid i norske elevers prestasjoner i matematikk. Det legges her vekt på å vurdere hvor konsistente de resultatene vi får, er, på tvers av de ulike studiene.

I **kapittel 4** redegjør vi for tidligere matematikkdidaktisk forskning med relevans for de problemstillingene vi tar opp i boka. I kapitlet drøftes ulike begrunnelser for faget i skolen. Det legges fram forskningsresultater på innhold i skolematematikken i land over hele verden, med vekt på noen konsistente profiler i grupper av land over tid, i ulike studier og på ulike nivåer i skolen. Implikasjoner og konsekvenser av disse ulikhetene drøftes. Kapitlet tar også opp noen trender for undervisning i faget og utviklingen i disse over tid. I **kapittel 5** analyseres prestasjonsprofiler for land basert på hvilket faglig innhold studiene tester, målt gjennom rammeverket som blir presentert i kapittel 2. I dette kapitlet presenteres også resultater som sammenlikner og diskuterer aspekter av norsk matematikkundervisning sammenliknet med et konkret østasiatisk land, nemlig Singapore.

I **kapittel 6** analyseres ulike faglige områder som testes i TIMSS Advanced og TIMSS med sikte på en debatt om faglige prioriteringer av innholdet i skolematematikken i Norge. Kapitlet analyserer vektleggingen av ulike fagområder i land over hele verden, med fokus på å sammenlikne de to fagområdene *algebra* og *statistikk*, som det er størst forskjell på når det gjelder vektlegging i Norge. Konsekvenser av den prioriteringen man har av faglig innhold i norsk skole, drøftes som en del av dette. **Kapittel 7** analyserer data fra de samme studiene med utgangspunkt i hvor godt norsk skole tar vare på elever med spesiell interesse og spesielt talent for matematikk. Kapitlet presenterer resultater som går på hvor stor andel av elevene i ulike land som gjennom skolegangen når et relativt høyt kompetansenivå, og drøfter konsekvenser av dette for den enkelte elev og for samfunnet som helhet.

De tre neste kapitlene, **kapitlene 8, 9 og 10**, presenterer og diskuterer resultatene på de oppgavene som er frigjort fra siste TIMSS Advanced-studie i henholdsvis algebra, kalkulus og geometri. Her presenteres oppgavene og tabeller med resultatene for norske elever sammenliknet med seks andre land i studien. Oppgavenes relevans sett i lys av norske læreplaner tas opp og diskuteres, det samme gjøres med mulige årsaker til at de norske elevene presterer slik de gjør. Disse oppgavekapitlene danner en bakgrunn for skoleperspektivet og universitetsperspektivet som tas opp i de to neste kapitlene, 11 og 12.

Kapittel 11 gir et skoleperspektiv på TIMSS Advanced-studien. Her presenteres eksempler på oppgaver med ideer og forslag til hvordan disse kan brukes i skolen. Typiske problemer norske elever har på visse fagområder, blir tatt opp og drøftet, sammen med forslag til hvordan man kan bidra til å forbedre undervisningen i matematikk. Det å gi elever i norsk skole oppgaver fra TIMSS Advanced, representerer en god metode for variasjon av oppgavetyper i undervisningen. **Kapittel 12** gir et universitetsperspektiv på TIMSS Advanced. Her fokuseres det på overgangen mellom videregående skole og universitetet. Blant annet ser man på hvilke problemer studenter som begynner på et universitetets-studium kan ha på fagområder som inngår i pensum for videregående skole. Drøfting av dette kan være nyttig både for lærere i skolen og for de som underviser studenter ved starten av et universitetsstudium.

Kapittel 13 oppsummer viktige funn fra de foregående kapitlene og peker på problematiske områder i norsk skolematematikk. Disse tas opp og drøftes med sikte på å reise konstruktive debatter blant alle som er interessert i skolen. Det gjelder både skoleforskere, skolemyndigheter og politikere. Men minst like mye gjelder det de som har sitt daglige virke i skolen, lærerne. Denne boka har blitt til i nært samarbeid med lærere ved en videregående skole, nettopp for å gjøre den aktuell for denne gruppen. Samarbeidet med lærerne i skolen har også vist seg å være nyttig fra et forskerperspektiv. Elever og foreldre kan gjerne dras med i disse debattene; alle har et forhold til skolen på ulike måter og har noe å bidra med.

Kapittel 14 er et metodekapittel som gir utdypende informasjon om bakgrunn, rammeverk og teknisk gjennomføring av TIMSS Advanced-studien. Noen viktige stikkord er utvalgsprosedyrer, måleskalaer og oppgavekategorier.

KAPITTEL 2

Matematikkinnholdet i TIMSS, TIMSS Advanced og PISA

Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Torgeir Onstad
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Den offentlige debatten om storskalaundersøkelser som PISA, TIMSS og TIMSS Advanced i Norge dreier seg i forbausende liten grad om det faglige *innholdet* i studiene, altså om *hva* de måler faglig. Et sentralt spørsmål i vurderingen av studienes relevans for norsk matematikkundervisning er i hvilken grad det de måler faktisk samsvarer med norske læreplanmål i faget. Undersøkelser om sammenheng mellom elevprestasjoner og bakgrunnsvariabler som måler elevbakgrunn, lærerkompetanse og liknende, har liten nytteverdi dersom prestasjonsdataene er målt på en måte som ikke er tilstrekkelig relevant for de læreprosessene som man ønsker skal foregå i skolen.

I dette kapitlet analyserer vi innholdet i de tre studiene TIMSS Advanced 2015, TIMSS 2011 matematikk 8. trinn og PISA 2012 matematikk ved å bruke et rammeverk for beskrivelse av matematikkinnhold. De valgte årene for studienes gjennomføring er velegnet for sammenlikning i et norsk perspektiv, siden studentkullet som ble testet i TIMSS Advanced i 2015 (13. trinn) er det samme som ble testet i PISA 2012 (10. trinn) og omtrent det samme som ble testet i TIMSS 2011 8. trinn. Vi bygger i dette kapitlet på resultater presentert på IEAs IRC-konferanser i 2015 og 2017 (Hole, Grønmo & Onstad, 2017; Hole et al., 2015). Dette gir et perspektiv på studiene som går på tvers av studienes egne underliggende rammeverk. Disse rammeverkene er svært ulike i sin natur, og vi skal starte med å se nærmere på dette. I kapittel 5 bruker vi klassifikasjonsresultatene vi får her til å undersøke ulike profiler blant land og regioner i verden når det gjelder prioritering og faglig kultur i matematikkundervisningen.

2.1 Prinsipielle ulikheter i rammeverk mellom TIMSS-studiene og PISA

Mens IEA-studiene TIMSS og TIMSS Advanced benytter seg av et rammeverk som essensielt er basert direkte på læreplanene i de deltakende landene eller utdanningssystemene (Mullis & Martin, 2014; Mullis et al., 2003), er rammeverket i PISA basert på en konkret matematikkdidaktisk teori som tar utgangspunkt i begrepet «mathematical literacy» (OECD, 2003). Røttene til PISAs rammeverk kan spores blant annet til det danske KOM-prosjektet (Kompetencer og matematiklæring) under ledelse av Mogens Niss rundt år 2000 (Niss, 1999b; Niss & Jensen, 2002), et rammeverk som igjen har fellestrekk med amerikanske *standards* fra 1980-tallet (NCTM, 1989). Her er det altså helt ulike tilnærmingsmåter som brukes i PISA og TIMSS. Mens PISA gjennom sitt teoretisk sett avklarte og spesifiserte rammeverk kan sies å innta en matematikkdidaktisk posisjon, slik at man i denne studien til og med kanskje kan sies å basere seg på et konkret «læringssyn», er det vanskelig å se noe tilsvarende i TIMSS og TIMSS Advanced. Selv om disse studiene også har et kognitivt rammeverk («cognitive domains» og liknende) som helt klart relaterer seg til matematikkdiaktiske begreper, er disse delene av studienes rammeverk så vidt nøytrale og grovkornede at de neppe kan sies å definere noen teoretisk «posisjon» på den måten PISAs rammeverk gjør. Skal man lete etter noe slikt for IEA-studiene, må man med andre ord gå til deltakerlandenes læreplaner. Det er disse som bestemmer det faglige innholdet i TIMSS og TIMSS Advanced, gjennom en form for flertallsavgjørelser. IEA-studiene har slik sett en mer pragmatisk og forsøksvis nøytral tilnærmingsmåte til matematikkdidaktikk.

Mens de faglige oppgavene i TIMSS og TIMSS Advanced altså ganske enkelt kan sees på som et uttrykk for hva som vektlegges i matematikkundervisningen blant de deltakende landene, er PISAs prestasjonsmålinger indirekte basert på et slags *anbefalt innhold* i matematikkundervisningen. Disse anbefalingene ligger implisitt i det underliggende kompetansebaserte rammeverket. I PISA modelleres begrepet «mathematical literacy» ved å splitte det opp i en liste av ulike matematiske *kompetanser*. Denne tenkningen ligger nært rammeverket til det danske KOM-prosjektet (Niss, 1999b), se også (Niss, 2015). I den norske rapporten fra PISA 2012 ble kompetansene i PISA beskrevet slik (Kjærnsli & Olsen, 2013):

1. Kommunisere med, i og om matematikk
2. Matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner
3. Representere matematiske størrelser, velge, veksle mellom og bruke matematiske representasjoner i oppgaveløsing
4. Resonnere og argumentere matematisk
5. Planlegge, velge ut og bruke problemløsingsstrategier
6. Bruke symbol- og formalspråk, regler og formelle matematiske metoder
7. Velge ut og bruke matematiske verktøy og hjelpemidler

Det kontroversielle med en slik oppsplittingsmåte ligger allerede i selve ideen om å *splitte opp* begrepet matematisk kompetanse: Noen vil kunne hevde at det ikke er mulig å arbeide meningsfylt med hver av disse syv kompetansene uten å bruke flere (alle?) på en gang, og at en oppsplitting av denne typen dermed leder oppmerksomheten bort fra det man kan hevde er et enhetlig mål som bør ligge til grunn for arbeidet med matematikk i skolen. Dette enhetlige målet kan kanskje beskrives delvis ved begreper som «matematisk forståelse», «abstraksjonsevne» og liknende – begreper som ikke passer direkte inn på denne kompetanselisten. Det er også interessant å diskutere dette i relasjon til begrepene *dybdelæring* og *progresjon*, som i skrivende stund er aktuelle i den norske læreplandebatten.

Kompetansetenkning basert på lister av enkeltstående *kompetanser* har fortsatt bred støtte i det vestlige matematikkdidaktiske miljøet, og vi har ikke til hensikt å ta stilling for eller mot en slik teoretisk vinkling her. Imidlertid er det av hensyn til våre analyser i dette kapitlet viktig at vi problematiserer det. Det er liten tvil om at tenkningen basert på listen av kompetanser gjengitt over har dratt det faglige innholdet i PISA mer i retning av såkalt hverdagsmatematikk enn hva som er tilfellet i læreplanene til mange land, og dermed også hva man finner i TIMSS og TIMSS Advanced. Dette slår tydelig ut når vi i dette kapitlet sammenlikner innholdet i PISA med IEA-studiene ved hjelp av vårt rammeverk, et rammeverk som måler avhengighet av matematisk teori.

2.2 Språk og innhold i skolematematikken: Funnet på og funnet ut

I dette delkapitlet skal vi beskrive en del av vår motivasjon for å utvikle det rammeverket for måling av matematisk teoriinnhold som vi skal bruke.

Uansett skoletrinn er det viktig at eleven klarer å skille ting matematikerne har *bestemt seg for* fra ting matematikerne har *oppdaget*. På norsk kan man si at det første området av matematisk teori består av ting som er *funnet på*, mens det andre består av ting som er *funnet ut*. Teknisk sett består området «funnet på» av definisjoner, notasjon og annen ren språkbruk. Området «funnet ut» består av matematiske *teoremer* eller *setninger*, ofte også kalt matematiske *resultater*. I området «funnet på» finner vi definisjoner av matematiske begreper som rektangel, parallellogram, kvadrattall og så videre. I området «funnet ut» ligger for eksempel Pytagoras' setning, arealformler for ulike geometriske figurer, algebraiske lover som for eksempel distributiv lov og andre elementer i matematisk teori som krever en *forklaring på hvorfor de er sanne*, formelt sett et *bevis*. I fortsettelsen vil vi bruke betegnelsene «forklaring» eller «begrunnelse» i stedet for bevis, fordi man sjelden arbeider med formelle bevis i skolen.

Røft sagt kan vi si at området «funnet på» representerer *språksiden* i matematikken, mens området «funnet ut» representerer *innholdet*. Merk at denne bruken av begrepet «innhold» fra noen synspunkter kan betraktes som misvisende; på en måte er selvsagt definisjoner også en del av «innholdet i matematikken». Likevel er vår erfaring at denne koblingen av de to områdene til «språk» og «innhold» leder tankene på en måte som i vår sammenheng er konstruktiv. Vi vil derfor referere til distinksjonen mellom «funnet på» og «funnet ut» som *LC-distinksjonen* (fra engelsk: *language and content*).

I skolen er det avgjørende at læreren hjelper eleven til å relatere seg på ulik måte til de to områdene innen matematisk teori. Hvis en lærer blir spurt «hvorfor» det er riktig at

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

for alle tall a, kan ikke læreren gjøre særlig mer enn å si at dette er sånn fordi folk («matematikerne») har bestemt at det skal være sånn. Matematikerne *har blitt enige om* at skrivemåten

$$a^3$$

skal oppfattes som en forkortning for $a \cdot a \cdot a$. Så på en måte er dette noe elevene bare må akseptere, det er i L-kategorien. På den annen side bør elevene lære å forholde seg på en helt annen måte til ting som ligger i «funnet ut»-området, altså området C. Et eksempel er regelen om at

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

for alle positive tall a og naturlige tall n og m. For denne regelen kan elevene med full rett kreve en begrunnelse for *hvorfor* det er sånn. Dette kan man forklare ut fra definisjonen av eksponentuttrykk som vi var inne på i sted. Undervisningen kan legges opp slik at elevene får arbeide med dette. Selv om en elev ikke kommer i mål med å forstå begrunnelsen, kan vissheten om at det *finnes* en begrunnelse, i seg selv være verdifull. Hvis eleven vet at dette *lar* seg begrunne, vet eleven også at det ikke er «opplagt», eller noe man forventes å forstå direkte. Dermed unngår en at eleven føler seg dum. Å bruke resultater en selv ikke har arbeidet seg gjennom begrunnelsen for, er noe også profesjonelle matematikere ofte gjør, og det er ikke nødvendigvis problematisk. Det ødeleggende problemet for elevens læring oppstår når ting i matematikken som bare «er sånn fordi de er [bestemt] sånn» blandes sammen med ting det ikke er meningen at eleven skal kunne forstå direkte.

Slik vi tenker oss inndelingen av matematisk teori i områdene L og C, er det klart at hva som havner i de to områdene, til dels avhenger av hvordan teorien bygges opp. I skolesammenheng vil grunnleggende algebraiske lover, som for eksempel distributiv lov, måtte regnes i C-området. Grunnen er at dette er regler det i skolesammenheng er naturlig å arbeide med en begrunnelse for, dette er ikke noe som i denne sammenhengen kan sies kun å være en definisjonssak. I mer avanserte kurs i reell analyse eller abstrakt algebra vil det derimot være naturlig å ta den distributive loven som et aksiom, og da ligger den formelt sett ikke i C-kategorien. Den vil da være en del av det man har bestemt som utgangspunkt for teorien, dvs. den er i kategorien «funnet på». Et annet eksempel er definisjonen av multiplikasjon. Slik tradisjonen er i norsk skole i dag, defineres $3 \cdot 4$ til å bety $4 + 4 + 4$. Andre steder defineres dette som $3 + 3 + 3 + 3$. Her har man et *valg* når det gjelder hva man bestemmer, men skal man bygge opp matematikken på en meningsfull måte for barna, må man bestemme seg for én av tingene. Man kan så *begrunne* at faktorenes orden er likegyldig; dette siste er i skolesammenheng uansett noe som bør plasseres i området «funnet ut».

Til tross for dens åpenbare viktighet i skolen er LC-distinksjonen lite diskutert i moderne matematikkdidaktikk. Man finner lite om dette i kilder som (Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick & Koon-Shing Le, 2013; English & Bussi, 2008; Niss, 2007). Distinksjonen passer ikke uten videre inn i de mest kjente rammeverkene for matematikkompetanser, for eksempel de vi var inne på i forbindelse med PISA og relaterte rammeverk. Dette har å gjøre med at verken teoriområdet L eller teoriområdet C naturlig tilsvarer noen spesiell type «kompetanse» i seg selv. Tatt i betraktning den store innflytelsen kompetansebaserte rammeverk har hatt på både vurderingsformer og læreplaner i matematikk gjennom de siste par tiårene, kan dette nettopp være noe av grunnen til at denne distinksjonen omtales så lite. Derimot finnes det mye forskning knyttet til hvert enkelt av de to områdene i LC-distinksjonen. For L-siden kan vi som eksempel ta forskning knyttet til distinksjonen mellom *concept image and concept definition* (Niss, 1999a). Merk også at generelle, mindre fagspesifikke teorier for *begrepslæring* typisk ikke vil fange opp LC-distinksjonen, fordi denne er spesiell for matematikkfaget. Blant forskning som gjelder C-siden, kan vi peke på det store forskningsfeltet knyttet til den rollen som *bevis* spiller i matematikk og matematikkundervisning på ulike nivåer (Hanna, 2000; Pedemonte, 2007; Tall, 2014) Men heller ikke disse forskningstradisjonene legger sin primære vekt på distinksjonen mellom L og C. Videre ligger LC-distinksjonen klart på et annet nivå enn prosess/objekt-dualiteten beskrevet av Anna Sfard (Sfard, 1991).

Når det gjelder betoning av LC-distinksjonen i lærebøker og andre læremidler i Norge, går det et klart skille mellom skolematematikken og matematikken på høgskole- og universitetsnivå. I lærebøker skrevet for universitetskurs er vanligvis distinksjonen mellom definisjoner og teoremer klar og eksplisitt. Dette henger sammen med at distinksjonen oppfattes som grunnleggende av profesjonelle matematikere, og at forfatterne av lærebøker på dette nivået oftest har en forskerutdanning i matematikk. I lærebøker for skolen er bildet et helt annet; der er ofte denne distinksjonen vanskelig å få øye på.

2.3 LC-rammeverket

Rammeverket vi skal bruke for å beskrive avhengighet av matematisk teori, er kalt *LC-rammeverket*. Navnet har å gjøre med at rammeverket er tenkt å fange opp både språksiden L og innholdssiden C i matematikken som beskrevet i forrige delkapittel. Utviklingen av dette rammeverket startet i 2014, og noen av resultatene vi drøfter i dette kapitlet ble presentert på IRC-konferansene i 2015 og 2017 (Hole et al., 2017; Hole et al., 2015). Rammeverket gir et mål for relevansen av matematisk teori for skriftlige tester. Vi tenker oss at testene består av en mengde enkeltoppgaver, som vi refererer til som *oppgaver* (engelsk: *items*). Oppgavene kan være flervalgsoppgaver eller åpen respons-oppgaver. Vi refererer til de siste som *åpne* oppgaver. LC-rammeverket klassifiserer oppgaver ved å dele opp mengden av oppgaver i testen ved to *dikotomier* (todelinger). Den ene dikotomien er ment å måle oppgavenes avhengighet av matematikkens L-del, og den andre av C-delen.

1. For å beskrive avhengighet av L-delen, brukes en dikotomi vi refererer til som *formel/ikke-formel*-dikotomien, eller *F/NF-dikotomien*. Siden LC-rammeverket er tenkt å måle innslaget av matematisk *teori*, ønsker vi at F/NF-dikotomien skal adressere de formelle delene av matematisk språk. I skolen operasjonaliseres dette naturlig gjennom matematiske *formler* i vid forstand, og derfor fokuserer vi på det. Kategoriene i F/NF-dikotomien er (i) mengden av oppgaver der minst én formel er involvert enten i oppgaveteksten eller i elevens forventede løsning eller løsningsmetode, og (ii) mengden av oppgaver der dette ikke er tilfelle. Vi refererer til (i) som *formelkategorien*, eller *F-kategorien*. Kategorien (ii) kaller vi *ingen formel*-kategorien, eller *NF-kategorien*.
2. For å beskrive avhengighet av C-delen, brukes en dikotomi vi refererer til som *teorem/ikke-teorem*-dikotomien, eller *T/NT-dikotomien*. Kategoriene i T/NT-dikotomien er (i) mengden av oppgaver der kjennskap til minst ett teorem («matematisk setning») er relevant for å løse oppgaven, og (ii) mengden av oppgaver der dette ikke er tilfelle. Vi refererer til (i) som *teoremkategorien, eller T-kategorien*. Kategorien (ii) kaller vi *intet teorem*-kategorien, eller *NT-kategorien*.

Til sammen gir dikotomiene F/NF og T/NT et mål for testens avhengighet av matematisk teori. Eller, om man vil, et mål for i hvilken grad kjennskap til matematisk teori hjelper eleven til å løse oppgavene i testen.

Merk at kategoriene T og F potensielt er overlappende, det går an at en oppgave kategoriseres som både F og T. For eksempel vil en oppgave der Pytagoras' setning er aktuell å bruke, typisk kunne klassifiseres som både T og F.

Begrunnelsen for å legge oppgaven i T-kategorien kan da være at Pytagoras' setning er et teorem. Oppgaven involverer altså innholdssiden (C-siden) av matematikken. Samtidig vil oppgaven kunne plasseres i kategorien F, fordi Pytagoras' setning vanligvis uttrykkes ved en formel. Det er altså ikke slik at oppgavekategoriene T og F representerer henholdsvis innholdssiden (C) og språksiden (L) i matematisk teori. Derimot er de *indikatorer på om en gitt oppgave involverer* henholdsvis C og L.

På samme måte kan en gitt oppgave også kategoriseres som både NF og NT. Dette vil da være en oppgave der ingen formler er involvert, og der ingen matematiske teoremer fra den antatte skolebakgrunnen i vesentlig grad hjelper eleven til å løse oppgaven.

Slik LC-rammeverket er konstruert, kan det også brukes på tester i andre fag enn matematikk, typisk fag der matematikk er aktuelt som et hjelpemiddel. Matematikkinnholdet vurderes på samme måte, enten vi er innenfor eller utenfor matematikkfaget selv. For eksempel bruker vi i dette kapitlet rammeverket til å analysere matematikkinnholdet i fysikkdelen av TIMSS Advanced 2015. Merk at rene «fysiske» formler som $F = ma$ og $E_k = (1/2)mv^2$ da naturlig også regnes som matematiske formler i vår forstand, fordi de involverer variabler som kan ta ulike tallverdier. Oppgaver som involverer slike formler, klassifiseres altså som F i LC-rammeverket. Tilsvarende vil det være i andre fag, som for eksempel kjemi eller økonomi.

2.4 Matematikkinnhold i TIMSS, PISA og TIMSS Advanced målt med LC-rammeverket

Klassifiseringen av oppgaver i henhold til dikotomiene F/NF og T/NT vil ha et subjektivt element i seg, og derfor må vi bruke en metodikk med grupper av kodere, måling av interkoder-reliabilitet og så videre. Dessuten trengs det presiseringer av klassifiseringskriteriene som delvis avhenger av typen tester vi ser på, i vårt tilfelle storskalaundersøkelser av typen TIMSS og PISA. For detaljene i dette henviser vi til (Hole et al., 2017; Hole et al., 2015). Vi skal gjengi noen hovedtrekk her.

Når det gjelder presisering av kriteriene for T/NT, diskuterte gruppene av kodere seg fram til følgende. For at en oppgave skal klassifiseres som T, må det finnes et teorem (minst ett) fra elevens antatte skolebakgrunn («pensum») som i vesentlig grad forenkler arbeidet med oppgaven. Hvis eleven derimot antas å måtte resonnere seg fram fra grunnen av, bare ved bruk av kjennskap til matematiske begreper (begrepsforståelse), klassifiseres oppgaven som NT. Videre framsto det som naturlig å operere med et visst «bunnfradrag». Enkle aritmetiske sammenhenger, som for eksempel $5 + 14 = 19$, ble ikke telt med som teoremer i denne sammenhengen. Begrunnelsen var at selv om disse i prinsippet er ting man har «funnet ut», slik at de altså *er* teoremer formelt sett, så behandles de ikke som dette i skolematematikken. Som eksemplifisering utarbeidet gruppene lister over teoremer som kan antas dekket i pensum for de aktuelle årstrinnene. Listene inneholdt blant annet algebraiske lover som

$$ab = ba$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Med på listene var også operasjoner man kan bruke for å løse likninger, som for eksempel at man kan legge til det samme tallet på begge sider av likhetstegnet. Listene inneholdt også

- former for areal, omkrets, volum og liknende for geometriske figurer
- geometriske teoremer som Pytagoras' setning, setningen om vinkelsummen i en trekant, setninger om formlikhet og så videre

Gruppene laget også en liste med eksempler på ting som mange lett kan tro representerer teoremer, men som ikke gjør det. Blant eksemplene her kan nevnes $a^0 = 1$ og $a^{-n} = 1/a^n$.

For dikotomien F/NF var utgangspunktet, som tidligere nevnt, at en *formel* er et matematisk uttrykk eller utsagn (for eksempel en likning eller en ulikhet) som inneholder minst én variabel. Variablene kan være representert syntaktisk ved bokstaver, ved andre typer symboler eller ved komplette ord. Med andre ord regner vi også

$$\text{strekning} = \text{fart} \cdot \text{tid}$$

som en formel i vår sammenheng. For at en oppgave skal klassifiseres som F, må et av disse tre kravene være oppfylt:

- Oppgaven inneholder en formel som eleven må bruke, eller
- oppgaven ber eleven om å lage en formel, eller
- en typisk elev vil kunne forventes å bruke en formel underveis i arbeidet med oppgaven.

Når det gjelder struktureringen av selve klassifiseringsarbeidet for de tre studiene, altså TIMSS matematikk 8. trinn, PISA matematikk og TIMSS Advanced, henviser vi til (Hole et al., 2017; Hole et al., 2015). Vi skal her nøye oss med å gjengi noen hovedtrekk.

For PISA 2012 og TIMSS 2011 8. trinn ble klassifiseringen gjennomført med to grupper av kodere. For hver gruppe ble interkoder-reliabiliteten målt ved Fleiss' kappa (Fleiss, Cohen & Everitt, 1969). Klassifiseringen ble for begge grupper gjennomført i to omganger, med mulighet for diskusjon av uoverensstemmelser mellom omgangene. Rollene til de to gruppene av kodere var litt ulike. Den første gruppen besto av 4 kodere, og det var hovedsakelig denne gruppen som utviklet presiseringene og tilpasningene av rammeverket beskrevet ovenfor. Den andre gruppen besto av to kodere, og denne gruppen ble brukt delvis for å sjekke overførbarheten av rammeverket via beskrivelse. Vi gjengir her kun klassifikasjonsresultatene for den kombinerte gruppen av 6 kodere. Resultatene for hver gruppe separat er gitt i (Hole et al., 2015).

Klassifikasjonen av TIMSS Advanced ble gjennomført på en litt annerledes måte. Her brukte vi i første omgang masterstudenter som arbeidet som kodere for TIMSS Advanced i Norge våren 2015, dvs. som var ansatt for å kode («sensurere») resultatene fra de norske elevene som deltok i studien. En gruppe på 4 studenter klassifiserte oppgavene fra matematikkdelen av TIMSS Advanced 2015 ved bruk av LC-rammeverket, og en annen gruppe på 4 klassifiserte oppgavene fra fysikkdelen ved det samme rammeverket. Studentene ble gitt en kort gjennomgang av rammeverket på forhånd. Deretter gjennomførte de én syklus med klassifisering, uten mulighet til diskusjon seg imellom underveis.

Dette designet ble valgt fordi det igjen var interessant å måle overførbarheten av rammeverkets kriterier. Mens klassifiseringen av fysikkoppgavene gav akseptable kappaverdier (0,70 og 0,67 for F/NF og T/NT henholdsvis), ble kappaverdiene i matematikk bare 0,53 for F/NF og 0,23 for T/NT henholdsvis.

Selv om kappaverdiene i matematikk var interessante i forbindelse med rammeverkets overførbarhet, var de for lave til å kunne gi et pålitelig bilde av matematikkoppgavene i TIMSS Advanced. Vi gjennomførte derfor en ny runde klassifisering av TIMSS Advanced matematikk våren 2017, denne gangen med en gruppe på 4 forskere som kodere. Disse gjennomførte to sykler med klassifisering, og de resulterende kappaverdiene var 0,68 for F/NF og 0,72 for T/NT. For detaljer henviser vi til (Hole et al., 2017).

Klassifikasjonsresultatene for PISA 2012 matematikk og TIMSS 2011 matematikk 8. trinn er vist i tabellene 2.1 og 2.2.

Tabell 2.1 Klassifisering av oppgaver fra PISA og TIMSS ved diktomien F/NF, i prosent av oppgaver.

	PISA matematikk 2012	TIMSS trinn 8 matematikk 2011
Klassifisert som F [bruker formler] av minst 5 av 6 kodere	18,8 %	21,7 %
Delte meninger (4–2 eller 3–3)	9,4 %	13,4 %
Klassifisert som NF [bruker ikke formler] av minst 5 av 6 kodere	71,8 %	65,0 %

Tabell 2.2 Klassifisering av oppgaver fra PISA og TIMSS ved diktomien T/NT, i prosent av oppgaver.

	PISA matematikk 2012	TIMSS trinn 8 matematikk 2011
Klassifisert som T [bruker teoremer] av minst 5 av 6 kodere	11,8 %	19,3 %
Delte meninger (4–2 eller 3–3)	2,4 %	7,4 %
Klassifisert som NT [bruker ikke teoremer] av minst 5 av 6 kodere	85,9 %	73,3 %

Tabell 2.3 viser koherensen mellom koderne for klassifikasjon av oppgaver fra PISA og TIMSS. Vi ser at klassifikasjonsresultatene framstår som ganske robuste.

Tabell 2.3 Koherens i den kombinerte gruppen av 6 kodere på TIMSS matematikk 8. trinn og PISA matematikk. Det første tallet er prosentandelen av oppgaver der alle de seks koderne var enige om klassifiseringen. Tallet i hakeparentes er prosentandel oppgaver der minst 5 av 6 kodere var enige. Tallet i parentes bakerst er koder-reliabiliteten målt ved Fleiss' kappa.

	PISA 2012	TIMSS 8. trinn 2011
T/NT klassifikasjon	88,2 % [97,6 %] (0,82)	78,8 % [92,6 %] (0,76)
F/NF klassifikasjon	77,6 % [90,6 %] (0,74)	65,4 % [86,6 %] (0,65)

Klassifikasjonsresultatene for TIMSS Advanced 2015 matematikk og fysikk er vist i tabellene 2.4 og 2.5.

Tabell 2.4 Klassifisering av oppgaver fra TIMSS Advanced ved dikotomien F/NF, i prosent av oppgaver.

	TIMSS Advanced 2015 matematikk	TIMSS Advanced 2015 fysikk
Klassifisert som F [bruker formler] av minst 3 av 4 kodere	67,0 %	31,1 %
Delte meninger (2–2)	8,7 %	7,8 %
Klassifisert som NF [bruker ikke formler] av minst 3 av 4 kodere	24,3 %	61,1 %

Tabell 2.5 Klassifisering av oppgaver fra TIMSS Advanced ved dikotomien T/NT, i prosent av oppgaver.

	TIMSS Advanced 2015 matematikk	TIMSS Advanced 2015 fysikk
Klassifisert som T [bruker teoremer] av minst 3 av 4 kodere	78,6 %	14,6 %
Delte meninger (2–2)	2,9 %	5,8 %
Klassifisert som NT [bruker ikke teoremer] av minst 3 av 4 kodere	18,4 %	79,6 %

Til sammen gir resultatene i tabellene 2.1, 2.2, 2.4 og 2.5 et grunnlag for å sammenlikne matematikkinnholdet i de fire studiene, målt gjennom LC-rammeverket. Hvis vi ordner studiene etter økende avhengighet av den matematikkfaglige innholdskomponenten, altså kategorien T, får vi følgende liste:

1. PISA 2012 matematikk: 11,8 % oppgaver T, 18,8 % F
2. TIMSS Advanced 2015 fysikk: 14,6 % oppgaver T, 31,1 % F
3. TIMSS 2011 matematikk 8. trinn: 19,3 % oppgaver T, 21,7 % F
4. TIMSS Advanced 2015 matematikk: 78,6 % oppgaver T, 67,0 % F

Merk at rangeringen ville ha blitt omtrent den samme hvis vi i stedet baserte oss på kategorien F, altså avhengighet av formelt matematisk språk. Eneste forskjell ville ha vært at TIMSS Advanced fysikk ville ha byttet plass med TIMSS matematikk 8. trinn. Dette illustrerer den naturlige avhengigheten mellom de to dikotomiene i LC-rammeverket: De måler begge innslaget av matematisk teori i studienes oppgavemateriale.

2.5 Forskjeller i studienes innhold

Fra resultatene i delkapittel 2.4 ser vi at det er store forskjeller mellom PISA og TIMSS når det gjelder hvordan studiene forholder seg til matematisk teori. Kun 11,8 % av oppgavene i PISA 2012 matematikk er slik at et eller annet matematisk resultat (teorem) som eleven kan forventes å kjenne til, i nevneverdig grad hjelper eleven når det gjelder å løse oppgaven. Kun 18,8 % av oppgavene i PISA involverer matematiske formler. Over 2/3 av PISA-oppgavene er uavhengige av både teoremer og formler. I disse oppgavene må altså elevene resonnere fra grunnen av, og det de eventuelt trenger av forkunnskaper fra matematikkfaget, er kjennskap til matematikkord («rektangel» og så videre) og andre ikke-formelle deler av matematisk språk. Utover dette er majoriteten av PISA-oppgavene rene problemløsingsoppgaver som ikke involverer matematisk teori. Også i TIMSS matematikk 8. trinn er over halvparten av oppgavene i begge kategoriene NT og NF, men relevansen av matematisk teori er langt større her. Det må også tas i betraktning at elevene som testes i TIMSS 8. trinn er 1–2 år yngre enn elevene som testes i PISA. Prosentandelen oppgaver i T-kategorien er over 19 % i TIMSS 8. trinn, mens den er under

12 % i PISA. Dette viser at disse to studiene måler kompetanse i matematikk på ganske ulike måter. Skal man vurdere betydningen av prestasjonsdata i PISA og TIMSS eller deres sammenheng med bakgrunnsvariable, er det viktig at man tar dette med i betraktning.

Ikke overraskende er matematikkinnholdet i TIMSS Advanced matematikk i særklasse det høyeste blant de fire studiene vi ser på her. Nesten 80 % av oppgavene er her i T-kategorien. Vi ser også at målt med LC-rammeverket er matematikkinnholdet i TIMSS Advanced fysikk større enn matematikkinnholdet i PISA matematikk. Vi ser dessuten at matematikkinnholdet i fysikkstudien ligger mer på språksiden (F) enn på innholdssiden (T).

I kapittel 5 undersøker vi sammenhenger mellom LC-klassifiseringene og elevprestasjoner. Vi vil da se at LC-rammeverket avdekker interessante forskjeller i undervisningstradisjoner i ulike land og ulike regioner i verden.

KAPITTEL 3

Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Torgeir Onstad
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

3.1 Introduksjon

I 2015 deltok Norge i flere internasjonale komparative studier med matematikk som et av de fagene som ble undersøkt. TIMSS Advanced er en studie av elever med full fordypning i matematikk i det siste året på videregående skole, TIMSS en studie av elever på barnetrinn og ungdomstrinn. Rammeverket til TIMSS Advanced og TIMSS er basert på en konsensus mellom de deltakende landene om hva som er viktig matematisk kunnskap slik det nedfeller seg i landenes læreplaner. Disse studiene (se kapittel 14) tester elevene med oppgaver i tradisjonell, ren matematikk, og i oppgaver som går på anvendelse av matematisk kunnskap i mer hverdagsaktuelle kontekster. I 2015 deltok norske elever også i PISA-studien, som undersøker 15 år gamle elevers prestasjoner i det de definerer som «mathematical literacy» (OECD, 2013). Se kapittel 2. Rammeverket i PISA baserer seg ikke på de deltakende landenes læreplaner, men på hva en gruppe eksperter har definert som nødvendig allmennkunnskap i et moderne samfunn, og oppgavene presenteres med lengre tekster i det vi kan kalle en type dagliglivs- eller annen kontekst (OECD, 2013). Ingen oppgaver i PISA tester elevene i tradisjonell, ren matematikk slik som det gjøres i en del av oppgavene fra TIMSS og TIMSS Advanced-studiene.

Fra et forskningsperspektiv er det en styrke med data fra ulike studier som man kan sammenholde og sammenlikne, under forutsetning av at man *tar hensyn til hva som testes* i de ulike studiene. I kapittel 2 i denne boka presenteres resultatene fra en analyse av *hvilken type matematisk kunnskap* som testes i studiene nevnt over. Ved å sammenholde resultatene fra ulike studier og på ulike trinn får man mer og sikrere informasjon om sterke og svake sider i et lands utdanningssystem. Resultatene av en enkelt studie kan vanskelig gi et fullgodt bilde av hvor godt landets utdanningssystem fungerer. I 2005 advarte finske matematikere og matematikkutdannere om at en ukritisk aksept av de gode resultatene i PISA medførte at man ikke så de svakheter og utfordringer som landet sto overfor. Resultatene i PISA ble akseptert som en type bevis for at den finske skolen fungerte veldig godt på alle måter, uten noen nærmere vurdering av hva studien målte og ikke målte. De finske matematikerne understreket at:

> *«the PISA survey measured only everyday mathematical knowledge, something which could be – and in the English version of the survey report explicitly is – called «mathematical literacy»; the kind of mathematics which is needed in high-school or vocational studies was not part of the survey. No doubt, everyday mathematical skills are valuable, but by no means enough». (Astala et al., 2005)*

Spesielt interessant er dette når vi i ettertid har fått bekreftet at bildet ikke var så ensidig positivt som man trodde. Finland var med i TIMSS i 1999 og i 2011. På 8. trinn i Finland målte man en markant nedgang i elevenes faglige prestasjoner. Advarslene fra de finske matematikerne i 2005 gikk nettopp på at PISA testet én type matematisk kunnskap, men lite den typen kunnskap tradisjonell matematisk kunnskap som mange elever vil trenge for videre utdanninger og yrker.

Ved et mer kritisk blikk på hva som er innholdet i det som undersøkes i en studie, og gjennom å sammenholde resultatene fra ulike studier med ulike rammeverk og på ulike trinn i skolen, vil man kunne få et langt sikrere og mer fullstendig bilde av hva som er de sterke og svake sidene i utdanningssystemet.

I dette kapitlet vil vi presentere noen sentrale hovedresultater som går på elevenes prestasjoner i de ulike studiene TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. Vi vil legge vekt på å se på utviklingen i elevenes prestasjoner over tid, og vi vil legge vekt på å sammenlikne prestasjoner på ulike fagområder i studiene. Hensikten er å kunne si noe om trender over tid og om konsistensen i resultater mellom studier og mellom ulike nivåer. I dette kapitlet vil vi i stor grad henvise til de nasjonale rapportene fra disse studiene som kom i slutten av 2016 (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016; Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Kjærnsli & Jensen, 2016). At Norge deltar i mange internasjonale komparative studier, studier med ulike rammeverk for innhold i hva de tester elevene i, og på ulike trinn i skolen, er en ubetinget fordel. Vi får da et ganske bredt bilde både av utviklingen over tid, og vi får gode indikasjoner på hvordan de ulike nivåene i skolen påvirker hverandre. Vi får også indikasjoner på hvilke utfordringer vi står overfor, og hvilke problemer vi må løse for å forbedre undervisningen i matematikk.

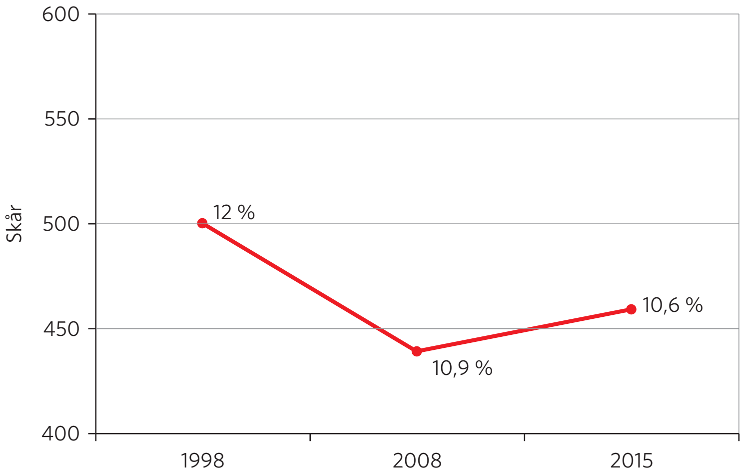
Grunnlaget for videre læring av matematikk vil, som i andre fag, legges i grunnskolen. Det elevene lærer av matematikk i grunnskolen har antagelig også betydning for *om* elevene velger å gå videre med matematikk i videregående skole, da det er rimelig å anta at det i stor grad påvirker elevenes syn på matematikk som fag. Vi presenterer først hovedresultater som går på elevenes prestasjoner i TIMSS Advanced i det siste året i videregående skole, herunder trender i prestasjoner over tid og på ulike fagområder. Deretter presenteres tilsvarende resultater fra TIMSS på barne- og ungdomstrinn, og til slutt presenteres resultater fra PISA på ungdomstrinnet.

3.2 Hovedresultater i TIMSS Advanced siste året i videregående skole

Den første internasjonale TIMSS Advanced-studien ble gjennomført i 1995. Da deltok ikke Norge i matematikk, bare i fysikk. Men i 1998 valgte Norge å gjennomføre TIMSS Advanced i matematikk med de samme oppgavene, de samme spørreskjemaene og de samme prosedyrene som i den internasjonale studien i 1995. For mer om dette, se (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Vi har derfor data i matematikk fra 1998, og med senere resultater fra 2008 og 2015.

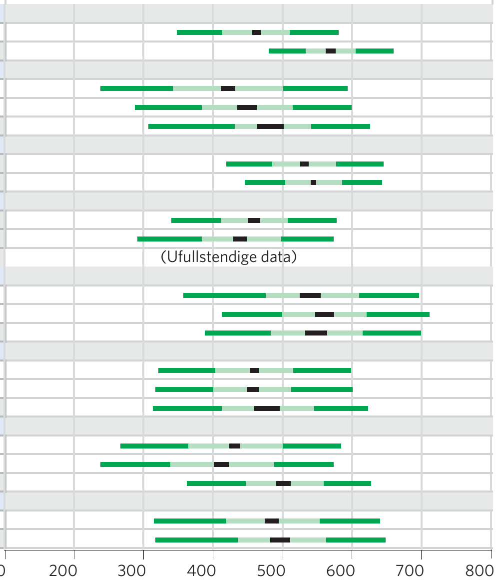
Figur 3.1 viser norske elevers prestasjoner i matematikk fra 1998 til 2015. Som det framgår av figuren hadde norske elever en markant tilbakegang i prestasjoner fra 1998 til 2008. I 2008 utmerket norske elever seg, sammen med svenske elever, med å ha den største tilbakegangen fra den første studien på 90-tallet (Grønmo et al., 2010). Fra 2008 til 2015 er det framgang i de norske elevenes prestasjoner, men fortsatt er de norske prestasjonene svakere enn i den første TIMSS Advanced-studien. En tilsvarende utvikling har man hatt i Sverige (Grønmo et al., 2010).

Figur 3.1 Norske trender i matematikk i TIMSS Advanced fra 1998 til 2015. Prosent av årskullet (dekningsgrad) er angitt på figuren.

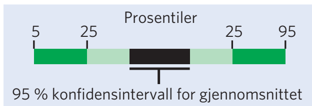


Tabell 3.1 Trender i skår og dekningsgrad for land som deltok i matematikk i TIMSS Advanced 2015 og som også har deltatt minst én gang tidligere.

Land	Dekningsgrad	Skår	Forskjeller mellom år: 2008	Forskjeller mellom år: 1995	Fordeling av prestasjoner
Frankrike					
2015	21,5 %	463 (3,1)		-107 ▼	
1995	19,9 %	569 (3,9)			
Italia					
2015	24,5 %	422 (5,3)	-27 ▼	-61 ▼	
2008	19,7 %	449 (7,2)		-34 ▼	
1995	14,1 %	483 (9,8)			
Libanon					
2015	3,9 %	532 (3,1)	-13 ▼		
2008	5,9 %	545 (2,2)			
Norge					
2015	10,6 %	459 (4,6)	20 ▲		
2008	10,9 %	439			
1998	12 %	500			(Ufullstendige data)
Russland (utvalg)					
2015	1,9 %	540 (7,8)	-21 ▼	-9	
2008	1,4 %	561 (7,0)		12	
1995	2,0 %	549 (8,2)			
Slovenia					
2015	34,4 %	460 (3,4)	2	-18	
2008	40,5 %	457 (4,3)		-20 ▼	
1995	75,4 %	478 (9,3)			
Sverige					
2015	14,1 %	431 (4,0)	19 ▲	-71 ▼	
2008	12,8 %	412 (5,6)		-89 ▼	
1995	16,2 %	502 (5,2)			
USA					
2015	11,4 %	485 (5,2)		-12	
1995	6,4 %	497 (7,4)			



▲ Senere år signifikant høyere
▼ Senere år signifikant lavere



KILDE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2015

I TIMSS Advanced-studien må man hele tiden vurdere resultatene i relasjon til hvor stor andel av det aktuelle årskullet i befolkningen som velger full fordypning i videregående skole, det vi kaller landets dekningsgrad (for mer se kapittel 14). Tabell 3.1 viser hovedresultatene for de landene som deltok i 2015-studien. Vi ser da at de norske prestasjonene ligger ganske lavt og at vi har en relativt lav dekningsgrad sammenliknet med flere av de andre landene som deltok. Land som Frankrike og Slovenia har bedre gjennomsnittlige prestasjoner enn Norge, samtidig er dekningsgraden to til tre ganger så høy som i Norge.

Kapittel 7 i denne boka har en grundigere drøfting av forholdet mellom andel som velger full for faglig dypning i videregående skole og hvor gode deres faglige prestasjoner er. På den måten får man informasjon om hvor *stor andel av befolkningen* i det enkelte land som kan kalles ekspertelever i matematikk ved slutten av videregående skole. Vi reiser derfor ikke noen diskusjon omkring dette her, men henviser til kapittel 7.

Det er også interessant å se hvordan de norske prestasjonsnivåene i TIMSS Advanced fordeler seg på de ulike fagområdene som elevene testes i, algebra, kalkulus og geometri. Tabell 3.2 viser gjennomsnittsprestasjoner i alle de deltakende landene på disse områdene.

Tabell 3.2 Prestasjoner fordelt på fagområder i matematikk, TIMSS Advanced 2015.

Land	Totalskår matematikk	Algebra (37 oppgaver)		Kalkulus (34 oppgaver)		Geometri (30 oppgaver)	
		Skår	Forskjell fra totalskår	Skår	Forskjell fra totalskår	Skår	Forskjell fra totalskår
Libanon	532 (3,1)	525 (4,0)	-6 (3,6)	544 (3,9)	12 (2,8) ▲	526 (3,7)	-6 (2,3) ▼
USA	485 (5,2)	478 (5,0)	-7 (1,7) ▼	504 (6,0)	19 (2,9) ▲	455 (5,7)	-30 (2,6) ▼
Russland	485 (5,7)	495 (6,3)	10 (1,9) ▲	459 (5,9)	-26 (1,2) ▼	500 (5,8)	15 (1,0) ▲
Portugal	482 (2,5)	495 (2,7)	12 (1,5) ▲	476 (2,6)	-6 (1,4) ▼	464 (3,2)	-18 (1,5) ▼
Frankrike	463 (3,1)	469 (2,9)	7 (1,8) ▲	466 (3,2)	3 (1,8)	441 (3,7)	-22 (1,3) ▼
Slovenia	460 (3,4)	474 (3,5)	14 (1,1) ▲	437 (4,4)	-23 (2,0) ▼	456 (4,0)	-4 (1,4) ▼
Norge	459 (4,6)	446 (4,1)	-13 (1,6) ▼	463 (5,3)	4 (1,5) ▲	473 (4,6)	14 (2,0) ▲
Sverige	431 (4,0)	422 (4,1)	-9 (1,2) ▼	438 (3,9)	7 (1,5) ▲	430 (3,7)	-1 (1,4)
Italia	422 (5,3)	414 (5,1)	-8 (2,2) ▼	433 (5,2)	11 (2,7) ▲	413 (5,7)	- 9(3,2) ▼

▲ Områdeskår signifikant høyere enn totalskår i matematikk
▼ Områdeskår signifikant lavere enn totalskår i matematikk

KILDE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study –TIMSS Advanced 2015

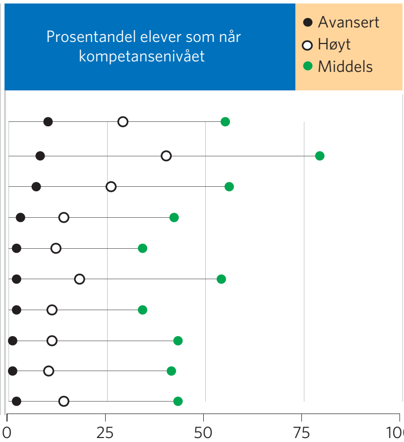
Norske elevers prestasjoner er markant svakere i algebra enn i kalkulus og geometri. I den internasjonale rapporten fra TIMSS Advanced 2015 står det at Norge og Sverige er de to landene som presterer svakest i algebra, både i absolutt i skår og relativt til eget lands gjennomsnittlige prestasjonsnivå (Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016b). Som det står i den norske TIMSS Advanced-rapporten fra 2016:

> *«Flere analyser av hva som vektlegges av matematiske emner på ungdomstrinn, i videregående skole og i lærerutdanning, har konkludert med at det gir mening å snakke om en stabil nordisk profil med relativt lite vektlegging av algebra på alle nivåer i skolen. Man har sett noe av det samme i engelskspråklige land; også i disse legges det relativt lite vekt på algebra sammenliknet med østeuropeiske og østasiatiske land.* (Grønmo et al., 2016)

TIMSS Advanced definerer også tre ulike kompetansenivåer for hvor godt elevene presterer: avansert nivå, høyt nivå og middels nivå. Tabell 3.3 viser fordelingen på disse kompetansenivåene for elever i alle landene som deltok

Tabell 3.3 Prosentandel elever som når de ulike kompetansenivåene i matematikk, TIMSS Advanced 2015.

Land	Avansert kompetansenivå (625)	Høyt kompetansenivå (550)	Middels kompetansenivå (475)	Dekningsgrad matematikk
Russland	10 (1,1)	29 (1,9)	55 (2,3)	10,1 %
Libanon	8 (1,0)	40 (2,7)	79 (1,8)	3,9 %
USA	7 (1,2)	26 (1,6)	56 (2,5)	11,4 %
Slovenia	3 (0,5)	14 (1,2)	42 (1,7)	34,4 %
Italia	2 (0,5)	12 (1,0)	34 (1,7)	24,5 %
Portugal	2 (0,5)	18 (1,1)	54 (1,7)	28,5 %
Sverige	2 (0,3)	11 (0,8)	34 (1,6)	14,1 %
Frankrike	1 (0,3)	11 (1,0)	43 (1,7)	21,5 %
Norge	1 (0,3)	10 (1,4)	41 (2,9)	10,6 %
Internasjonal median	2	14	43	



KILDE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2015

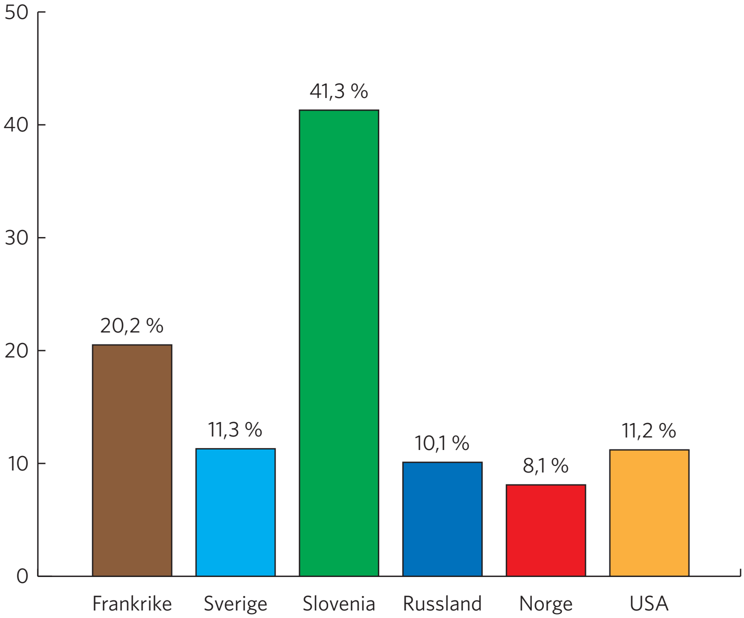
i TIMSS Advanced 2015. Som vi ser av denne tabellen utmerker Norge seg med å være det landet som har den laveste prosentandelen elever på avansert og høyt nivå. Når vi også tar med i betrakningen den lave dekningsgraden vi har i Norge for hvor stor andel av vårt årskull som velger full fordypning i matematikk på videregående skole, blir dette resultatet ennå mer bekymringsfullt. Dette tas opp og diskuteres nærmere i kapittel 7 i denne boka, som ser på hvordan skolen tar vare på sine talentfulle elever i matematikk. Se også (Grønmo, Jahr, Skogen & Wistedt, 2014).

Det er også interessant å se på rekrutteringen av jenter og gutter til det mest avanserte kurset i matematikk på videregående skole. Figur 3.2 viser at Norge rekrutterer en lavere andel jenter enn det de andre referanselandene gjør. Som det sto i den første norske rapporten fra TIMSS Advanced 2015:

> *«Norge ligger helt på bunnen når det gjelder hvor stor andel av jentene i årskullet som velger full fordypning i matematikk. I Slovenia og Frankrike er det henholdsvis 41,3 % og 20,2 % av jentene i årskullet som velger matematikk til topps, mot bare 8,1 % i Norge.»* (Grønmo et al., 2016, s. 36)

Med andre ord, likestillingslandet Norge er ikke noe godt eksempel når det gjelder å rekruttere jenter til matematikk. Norge har også et veldig kjønnssegregert arbeidsmarked (SSB, 2005, 2016). Disse tingene henger sannsynligvis sammen (Grønmo et al., 2016).

Figur 3.2 Prosentandel av hele årskullet jenter som er med i populasjonen testet i matematikk, TIMSS Advanced 2015, utvalgte land.



3.3 Hovedresultater fra TIMSS på barnetrinn og ungdomstrinn

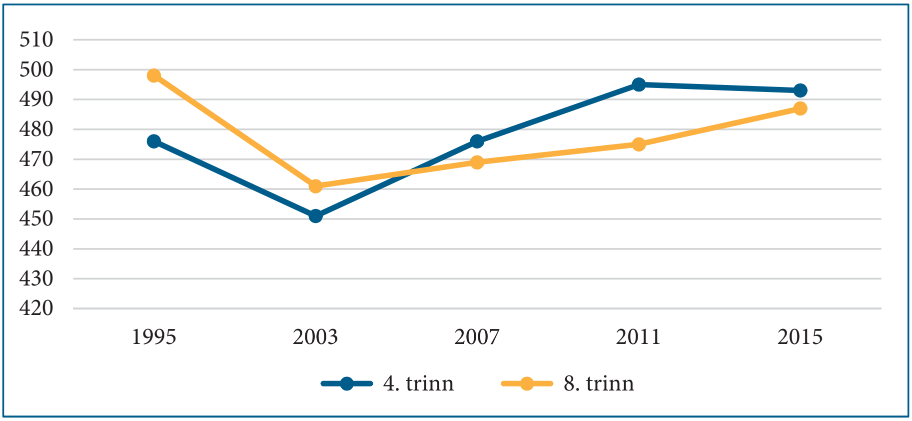
I TIMSS på barnetrinn og ungdomstrinn har vi data fra 1995, 2003, 2007, 2011 og 2015. Tabell 3.4 og figur 3.3 viser utviklingen i prestasjoner for norske elever fra 1995 til 2015 for 4. trinn og 8. trinn, de to årstrinnene vi har trenddata for. Vi har ikke slike trenddata for 5. eller 9. trinn, da det er første gang dette er hovedpopulasjonene for Norge i 2015.

Vi ser at det var en markant tilbakegang på både 4. og 8. trinn fra 1995 til 2003. Etter 2003 har det vært målt framgang på begge trinn fram til 2011. Fra 2011 til 2015 har framgangen stoppet opp på barnetrinnet. I 2011 testet Norge også et halvt utvalg av elever på 5. trinn. Det er ingen endring i norske elevers prestasjoner på verken 4. trinn eller 5. trinn fra 2011 til 2015. Det ser ut til at den positive trenden man har hatt etter 2003 nå har stoppet opp på barnetrinnet. Det som er positivt er at man på 4. trinn nå ligger over det nivået man hadde i 1995, men her må man ta med i vurderingen at norske elevers

Tabell 3.4 Utvikling i norske elevers prestasjoner i matematikk i TIMSS fra 1995 til 2015.

	1995	2003	2007	2011	2015
4. trinn	476	451	476	495	493
8. trinn	498	461	469	475	487

Figur 3.3 Utvikling i norske elevers prestasjoner i matematikk i TIMSS fra 1995 til 2015.



matematikkprestasjoner på barnetrinnet var svært lave i 1995, klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet i 1995-studien, altså 500 poeng (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turmo, 2004).

Det mest sentrale fagområdet som elevene testes på i TIMSS på barnetrinnet er tall og tallregning; 50 % av oppgavene fra dette fagområdet. Det er også det området hvor norske elever presterer svakest, både på 4. trinn og på det nye hovedtrinnet for Norge, 5. trinn. Emneområdet tall inneholder i stor grad oppgaver knyttet til det å beherske de fire regningsartene og å regne med brøk og desimaltal. Som det står i den norske rapporten fra TIMSS 2015:

> *«Norske elever på dette trinnet presterer godt i Tall både i et internasjonalt og i et nordisk perspektiv. Men avstanden fra Norge og opp til de østasiatiske landene som presterer aller best i TIMSS, er* ***størst på dette sentrale emneområdet****. Så her er det fortsatt et forbedringspotensial.»* (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 35, vår utheving)

På 8. trinn er det fortsatt en framgang i norske elevers prestasjoner i matematikk fra 2011 til 2015. I et lengre perspektiv er likevel bildet på 8. trinn ikke så positivt; norske elevers prestasjoner er fortsatt svakere enn i 1995. Den internasjonale TIMSS-rapporten fra 2015 peker på at det *kun er tre land*, Norge, Sverige og Ungarn, som presterer svakere i 2015 enn det de gjorde i 1995 (http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/timss-2015/mathematics/student-achievement/). På tross av noe framgang i de senere TIMSS-studiene er det derfor viktig at vi også ser på resultatene med sikte på å finne mulige forklaringer til at vi ennå ikke er tilbake til det nivået vi hadde for jevngamle elever på ungdomstrinnet i 1995.

Ser vi på trendene på de ulike fagområdene, tall, algebra, geometri og statistikk på 8. trinn, så er er det interessant at vi får et konsistent bilde av at det store problemet i norsk skole er på området algebra. Som det står i den norske rapporten fra TIMSS 2015, skårer norske elever

> *«svært svakt i Algebra sett i forhold til de andre emneområdene. For emneområdene Tall og Geometri har det vært en betydelig framgang i perioden 2011–2015. Det samme gjelder for perioden 2007–2015. I den sistnevnte perioden har framgangen vært 19 poeng for Tall og 20 poeng for Geometri. Også for statistikk er det en signifikant framgang på 16 poeng i denne 8-årsperioden.»* (Bergem et al., 2016, s. 41)

Fra 2011 til 2015 er det en generell forbedring i prestasjoner for 8. trinns elevene, samtidig er det en signifikant tilbakegang i elevprestasjoner fra 2011 til 2015 i algebra. Gang etter gang framstår elevenes svake prestasjoner i algebra som det store problemet i norsk skole. Ekstra bekymringsfullt er det når vi nå ser en negativ utviklingen i elevenes prestasjoner på dette fagområdet. I TIMSS rapporten fra 2011 sto det at de svake norske resultatene på dette området mest sannsynlig var «*et uttrykk for at algebra ikke anses som så viktig å undervise i norsk skole*», særlig siden man har sett det samme i alle internasjonale studier helt tilbake fra 1995 (Grønmo et al., 2012, s. 26).

Tall og tallregning kan sees på som det mest grunnleggende å lære elvene i matematikk, det er en basis for all videre læring, generelt og ikke minst i algebra som kan sees på som en generalisering av tall og tallregning (aritmetikk). Det er derfor problematisk at norske elevers prestasjoner er svakest på de mest grunnleggende områdene i matematikk, som tall på barnetrinnet og algebra senere i skolen. Norske elevers prestasjoner på ulike fagområder tas opp og drøftes spesielt i kapittel 2 den norske TIMSS-rapporten (Bergem et al., 2016).

3.4 Hovedresultater fra PISA på ungdomstrinnet

Nivået for norske elever i matematikk i PISA har holdt seg ganske stabilt fra 2003 til 2015, den perioden PISA har trenddata for i matematikk. PISA opererer med ett av fagene lesing, matematikk og naturfag som hovedområde i studien hvert av årene den gjennomføres. Matematikk var hovedområde første gang i 2003, siste gang i 2012. I den norske PISA-rapporten for 2015 står det:

> *«I matematikk er det en signifikant framgang fra 2012 til 2015, men det er ikke en signifikant forskjell mellom 2003 og 2015.»* (Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 21)

> *«Samtidig er endringen fra PISA 2003 til PISA 2015 så liten at endringen ikke er statistisk signifikant om man sammenlikner matematikkprestasjoner i disse gjennomføringsårene. Det er derfor først ved senere PISA-undersøkelser vi kan se om den observerte endringen representerer en positiv trend, eller om trendlinjen fortsatt vil regnes som «flat».»* (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 116)

I norsk skoledebatt har man ofte omtalt situasjonen med svake resultater i PISA og TIMSS som kom i 2004 som «PISA-sjokket». I PISA 2003-rapporten står det at det er:

> *«. . .vanskelig å forklare de litt svake norske prestasjonene i matematikk med at den norske skolematematikken avviker betydelig fra det som måles i PISA. Det er derfor rimelig å si at matematikkresultatene gir relevante mål for resultatkvaliteten i norsk skole.»* (Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe & Turmo, 2004, s. 252)

I rapporten fra PISA 2003 trekkes konklusjonen om at samsvaret mellom det som måles i PISA og hva som vektlegges i skolen er stor, og at resultater fra PISA derfor kan si noe om kvaliteten av matematikkundervisningen i Norge. Når resultatet som måles i 2015 er lik det i 2003, er det grunn til å stoppe litt opp. Det som omtales som et sjokk i 2003, er det vel fortsatt grunn til å kalle et sjokk i 2015, hvis resultatene er de samme?

Det kan være flere årsaker til at det ikke ser ut som om man snakker om samme sjokk i 2015. En grunn kan være at matematikk ikke er hovedområde i PISA-studien i 2015, da er det naturfag som er hovedområde. Fokuset er derfor litt mindre på matematikk i 2015. Men det var heller ingen endring i matematikkprestasjoner for norske elever fra 2003 til 2012, de to årene hvor matematikk var hovedområde.

En annen grunn til at man tilsynelatende ikke er like sjokkert nå som i 2003, kan være at andre land som man sammenlikner med, har gått tilbake. Det gjelder både Sverige og Finland (Bergem et al., 2016; Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2012). På den måten framstår de norske resultater som noe bedre i en nordisk sammenlikning enn tidligere. I PISA sammenlikner man som oftest med de andre nordiske landene, og med OECD-gjennomsnittet. Det er verdt å merke seg at i PISA er det ikke noen fast skala man relaterer resultatene til, slik som i TIMSS og TIMSS Advanced. I PISA relaterer man resultatene til OECD-gjennomsnittet, som endrer seg over tid. I 2003 var OECD-gjennomsnittet i matematikk 500, mens det i 2015 var falt til 492 (Kjærnsli & Jensen, 2016). Av den grunn kommer Norge nå noe bedre ut i disse sammenlikningene, som det står i den norske PISA-rapporten fra 2015-studien: «*for første gang presterer norske elever signifikant høyere enn OECD-gjennomsnittet*» (Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 110). De norske resultatene kommer noe bedre ut i disse sammenlikningene nå, ikke nødvendigvis bare fordi vi har blitt bedre, men fordi OECD-gjennomsnittet har sunket. PISA-gruppen i Norge stiller selv spørsmålet om de norske prestasjonene i matematikk er gode nok, og gir sitt svar på dette:

> «*Generelt mener vi at det er mer interessant å studere hvordan de norske resultatene endrer seg over tid, enn å sammenlikne med andre land. Resultatene fra PISA 2012 viser at norske resultater er stabile rundt OECD-gjennomsnittet, men alle forutsetninger er til stede for at norske elever kan prestere bedre.*»...
>
> «*Det er ønskelig at andel elever som presterer på de høyeste nivåene økes. Resultater fra 2012 viser at andelen norske elever på de høyeste nivåene er lavere enn hva man kunne forvente ut fra gjennomsnittet. Teknologiutvikling og innovasjon er viktig i Norge og krever kandidater med høy kompetanse i realfag. I et slikt perspektiv, er det viktig å øke andelen elever som presterer på de høyeste nivåene i naturfag og matematikk.*»
> (ref nettsider: http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/vanlige-sporsmal/index.html)

I PISA 2003-rapporten «Rett spor eller ville veier» oppsummerte man følgende:

> «*Unge mennesker i dag lever i en underholdningspreget tid, særlig har TV-mediet bidratt til at endog informasjon først og fremst skal fungere som underholdning. Infotainment er det engelske uttrykket for dette fenomenet. Skolen står i fare for å følge etter hvis den ikke bevisst våger å stå fram som en motpol til denne tendensen i tida, for det går ingen «kul» snarvei til kunnskap. Hemmeligheten bak god faglig framgang ligger i målbevisst arbeid mot definerte mål. At dette til en viss grad fortoner seg som litt av en hemmelighet i norsk skole, på tross av at det burde være velkjent nok, henger trolig sammen med at målbevisst arbeid mot definerte mål faktisk kan være ganske strevsomt.*» (Kjærnsli et al., 2004, s. 259–260)

Dette sitatet er ikke blitt mindre aktuelt siden rapporten kom ut i 2004. Når vi nå ser at vi står på stedet hvil i matematikkprestasjoner etter 2003, er kanskje tiden moden for å jobbe målbevisst og systematisk for å bedre norske elevers prestasjoner i matematikk, og ikke være fornøyd, selv om vi framstår litt bedre i sammenlikninger på grunn av tilbakegang i andre land?

De landene som ligger høyest i PISA er i stor grad land som også presterer godt i TIMSS, særlig gjelder dette østasiatiske land som Singapore, Japan, Hong Kong og Sør-Korea. Noen av disse er medlemmer i OECD, noen står utenfor OECD. Andre land med bedre prestasjoner enn i Norge er Sveits, Canada og Nederland.

Det er også interessant å se på de norske prestasjonene i PISA innenfor de ulike fagområdene som elevene testes i. Det området som de norske elevene presterer best på er Usikkerhet, det som i PISA inneholder det vi kan kalle elementær statistikk (Kjærnsli & Olsen, 2013; OECD, 2013). De norske prestasjonene er svakest på områdene Rom og form (som ligger nær opp til geometri) og Forandring og sammenheng (den delen av PISA som ligger nærmest algebra) (ibid.).

3.5 Avsluttende kommentarer

Vi får et konsistent bilde over de siste 20 årene, basert på resultatene i ulike studier, som viser at det store problemet i norsk skolematematikk er norske elevers svake prestasjoner i algebra. På dette området presterer elevene gjennomgående svakt i TIMSS Advanced i slutten av videregående skole, og i TIMSS og PISA på ungdomstrinnet. Det mest urovekkende er at de trendene vi ser på dette området peker nedover. På tross av noe framgang generelt, skifter det mellom liten endring eller tilbakegang på området algebra.

Det fagområdet som norske elever presterer svakest i på barnetrinnet er tall og tallregning. Dette er fagområdet som legger grunnlaget for all videre læring i faget, generelt og ikke minst for læring av algebra. Algebra kan bli sett på som en form for generalisering av aritmetikken, en generalisering av tall og tallregning. Mer om dette i kapittel 6, som analyserer prioritering av emneområder i skolematematikken i ulike land gjennom hele skoleløpet (barnetrinn, ungdomstrinn, videregående skole).

KAPITTEL 4

Et matematikkdidaktisk perspektiv

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapittelet presenteres en del resultater fra tidligere matematikkdidaktisk forskning med relevans for matematikkundervisning i Norge. Vi ser nærmere på hva som legitimerer fagets plass i skolen – spørsmål om hvorfor elevene skal lære matematikk. Med det som bakgrunn drøfter vi innholdet i skolematematikken – hva elevene skal lære – for deretter å ta opp de mer metodiske spørsmålene om hvordan undervisningen kan legges opp og gjennomføres. Dette danner en forskningsbasert bakgrunn for de videre resultatene og drøftingene som presenteres i andre kapitler i boka.

Fagets hvorfor, legitimering av faget plass i skolen, tas opp i delkapittel 4.1. Fagets hva, innholdet i den matematikk elevene skal lære, tas opp i delkapitlene 4.2 og 4.3. I delkapittel 4.4 tas fagets hvordan opp, det som går på metodiske sider av undervisningen.

4.1 Legitimering av faget i skolen – matematikk for alle

Matematikk er et av de mest sentrale fagene i skolen. Opp gjennom tidene er ulike begrunnelser blitt brukt for hvorfor vi skal lære matematikk, for hva som skal være innholdet i faget, og for hvilke metoder som skal brukes i undervisningen. Både begrunnelsene og hva som har utkrystallisert seg på bakgrunn av disse, har variert mye over tid og mellom land. De siste tiårene har matematikkdidaktikk utviklet seg til et betydelig forskningsområde når det gjelder slike spørsmål. Det er vedvarende diskusjoner omkring denne typen spørsmål både nasjonalt og internasjonalt.

At matematikk oppfattes som et kjernefag, avspeiler seg i den sentrale plassen det har i grunnskole og videre utdanning verden over. Elevers prestasjoner i matematikk har også blitt brukt til å sortere hvem som skal få tilgang til ulike typer høyere utdanning. Men i et samfunn i stadig forandring og med mange fagområder som det er ønskelig at alle har kunnskaper i, er det ikke lenger selvsagt at så mye tid skal brukes til matematikk. Den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss nevner tre grunnleggende årsaker som ligger bak en allmenn matematikkundervisning verden over:

- *Den skal bidra til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet i grove trekk, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn og nasjoner.*
- *Den skal bidra til at samfunnet opprettholdes og utvikles politisk, ideologisk og kulturelt, enten for seg selv eller i konkurranse med andre samfunn eller nasjoner.*
- *Den skal gi individer de forutsetningene de trenger for å håndtere det som skjer i forskjellige perioder av livet deres – i utdanningen, i yrkeslivet, privat, på fritiden og i rollen som samfunnsborgere.* (Niss, 2003, s. 291)

I de fleste land begynte ikke samfunnet å tilby utdanning for bredere lag av befolkningen før på 1800-tallet. Norge fikk da en offentlig utdanning beregnet på folk flest. Grunnutdanningen i matematikk var aritmetikk, anvendt aritmetikk og deskriptiv geometri med vekt på måling og målbarhet. Begrunnelsen var å styrke samfunnets teknologiske og sosioøkonomiske utvikling. Utdanning ut over grunnskolen, som bare var tilgjengelig for et lite mindretall, skulle forberede elevene for frie yrker eller stillinger innen offentlig administrasjon, kirke eller skole.

Alle de tre argumentene nevnt over fikk økt betydning utover på 1900-tallet med «matematikk for alle» som en viktig drivkraft i den vestlige verden. I mange land, deriblant de skandinaviske, ble det lagt stor vekt på at et levende demokrati forutsetter kompetente samfunnsborgere. Begrunnelser som de nevnt ovenfor, framhever matematikkens nytteverdi såvel som dens allmenndannende betydning (Kaiser-Messmer & Blum, 1993). Matematikk har også vært begrunnet med det vi kan kalle formaldanning, at faget i seg selv er god «hjernetrim», den samme typen argument som tidligere ble brukt om latin (Niss, 2003).

Matematikk har vært og er viktig for den vitenskapelige utviklingen på mange områder, innen naturvitenskapene, økonomi og informasjonsteknologi.

Også på andre områder, som for eksempel medisin, samfunnskunnskap og språk, utgjør matematikk en viktig basis for mye av forskningen. Samfunnet er basert på mer eller mindre avanserte matematiske modeller og beregninger (Ernest, 2000; Skovsmose, 1994). Niss (1983) har pekt på det paradoksale i at vi lever i et samfunn hvor matematikk brukes til å styre og regulere det meste av dagliglivet vårt, samtidig som den enkelte kan fungere tilsynelatende utmerket uten særlig mye matematisk kunnskap. Matematikken har en objektiv relevans som basis i samfunnet, men en subjektiv irrelevans for den enkelte, som kan greie seg uten mye matematisk kunnskap (Niss, 1994). Det store spørsmålet blir derfor hvorfor alle elever skal lære matematikk – hvorfor dette faget har en så sentral rolle i undervisningen i skolen over hele verden.

Selv om man godt kan greie seg uten mye matematisk kunnskap, er det også mange situasjoner som forutsetter matematisk kunnskap for at man skal forstå og kunne innvirke på samfunnet rundt seg. For eksempel bygger moderne demokratier på at man kan «se hverandre i kortene», at man ikke bare skal overlate styringen til et fåtall eksperter. Politikere i dag henviser ofte til ulike tall og beregninger for å virke overbevisende i debatter. Budsjetter er mer styrende enn retoriske uttalelser. I et levende demokrati trenger politikere, som folk flest, fundamentale kunnskaper i matematikk for å være aktivt deltakende samfunnsborgere.

På det personlige plan trenger man også matematisk kunnskap, for eksempel for å ha oversikt over egen økonomi, og for å kunne handle varer og tjenester og vurdere ulike lånetilbud. Slik sett har matematisk kompetanse blitt sett på som et verktøy til personlig frigjøring (D'Ambrosio, 1985; Mellin-Olsen, 1987; Skovsmose, 1994). Matematikk berører oss alle også i mer trivielle daglige sysler. Når barn leker, når man spiller ulike spill, når man har turneringer i sport, når man leser aviser, og i mange andre daglige aktiviteter, er matematikk ofte involvert. Dagliglivet er gjennomsyret av matematikk. Ofte inngår det som en så naturlig del at man ikke tenker på det som matematikk.

Den enkeltes behov for matematikk i dagliglivet og som aktivt deltakende samfunnsborger har vært framhevet i både læreplaner og studier de siste tiårene. En internasjonal komparativ studie som PISA (Kjærnsli & Olsen, 2013) har en rammeplan som nettopp framhever slike begrunnelser for det de tester elevene i, det de kaller «mathematical literacy». Vi har ikke noe godt norsk ord for dette. I de nasjonale PISA-rapportene har man brukt noe ulike betegnelser (Kjærnsli & Olsen, 2013), og det har også blitt drøftet i flere artikler

(Olsen & Grønmo, 2006; Grønmo og Olsen, 2006). Det som kjennetegner oppgavene i PISA er at de hovedsakelig tester elevene i det man kan kalle i en dagliglivs- eller hverdagsmatematikk. Oppgavene i PISA presenteres hovedsakelig i en lengre tekst hentet fra en tenkt hverdagssituasjon eller annen kontekst fra virkeligheten. Ingen av oppgavene tester eleven i tradisjonell, ren, formell matematikk, se delkapittel 4.2 og kapittel 2 i boka for mer om dette. Vi bruker den engelske betegnelsen matematical literacy en del steder i boka, en avklaring av begrepsbruken og betegnelser for dette faller utenfor rammene for denne boka.

Grunnleggende kompetanse i matematikk er viktig for mange jobber og utdanninger, og for å kunne bidra på en positiv måte til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet. Det er viktig for å opprettholde og utvikle landet i en positiv retning for landet selv eller i konkurranse med andre samfunn og land. Slike begrunnelser er det rimelig vil bli enda viktigere framover. Se for eksempel diskusjoner som dette:

https://www.superprof.co.uk/blog/maths-and-the-modern-world/

http://www.ncert.nic.in/pdf_files/Final-Article-Role%20of%20Mathematics%20in%20the%20Development%20ofSociety-NCER-.pdf

I Norge, som i andre nordiske og vestlige land, er det matematikk i dagliglivet for den enkelte som ofte har stått sentralt når man skal definere både hvorfor matematikk i skolen er viktig, og hvilket innhold som skal vektlegges i skolematematikken. Særlig gjelder det de siste tiårene. De store utfordringene samfunnet står overfor, ikke minst når det gjelder miljø og økonomi, og den raske teknologiske utviklingen vi ser, bidrar til å aktualisere behovet for en debatt om hvorfor elevene skal lære matematikk, og ikke minst hva som skal være innholdet i den matematikken de skal lære.

4.2 Innholdet i skolematematikken

I Norge, som i mange andre land, har det etter 2. verdenskrig vært satset mye ressurser på å gi alle landets borgere en god utdanning. Diskusjonene om hva som skal være innholdet i skolematematikken, kan sees i lys av denne store satsingen, det går både på hva matematikk er, og ikke minst hvilke deler av matematikken som skal inngå i en skole for alle (Ernest, 1991; Skovsmose, 1994).

Vi vil ta opp noen sider ved spørsmålet om hva matematikk er, men uten å reise den grunnleggende filosofiske debatten om dette. For mer om dette henviser vi til Skovsmose og Ernest (ibid.).

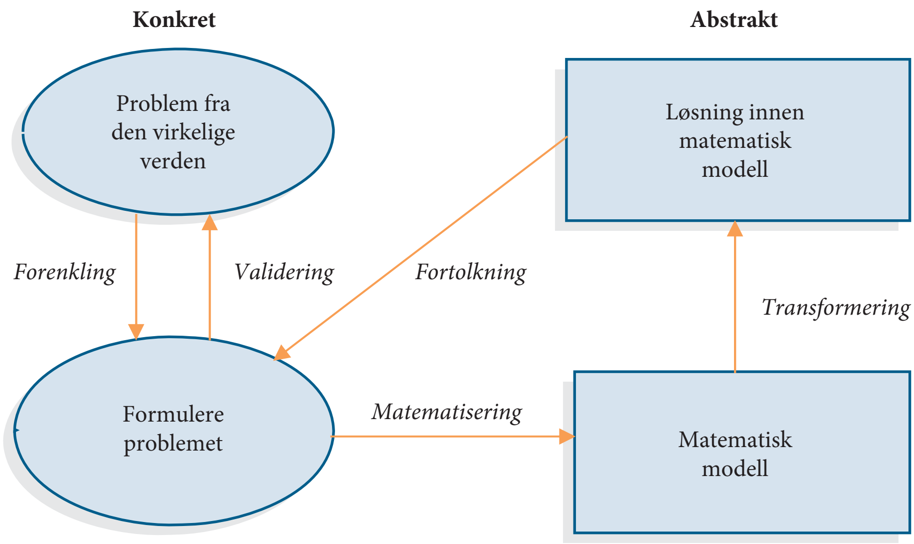
At det er mye diskusjon om innholdet i grunnskolematematikken, skyldes ikke minst at det er et fag som mange elever strever med (Naalsund, 2012). Gjennom det siste halve århundret har mange ulike syn på hva elevene skal lære, gjenspeilet seg i læreplanene. Med Sputniksjokket i 1957 oppstod et krav om å reformere skolematematikken, og resultatet var bølgen med «moderne matematikk» som i Norge gikk fram til slutten av 1970-tallet. Dette var et forsøk på å fokusere på matematikkens egenart, hvor begreper som mengder og logiske operatorer ble sentrale i innholdet i skolen. Redusert elevkompetanse knyttet til rene regneferdigheter gav så en reaksjon med slagordet «back to basics», som innebar økt vektlegging på elementære ferdigheter i matematikk På 1980-tallet var «problemløsing» en populær betegnelse på det man håpet skulle bli en fornyelse av faget. Ikke minst avspeilet dette seg i den daværende norske læreplanen: «Problemløsing er tatt med som eget hovedemne og skal være en del av all matematikkopplæring» (KUD, 1987, s. 195). På 1990-tallet var det gjerne matematikk knyttet til dagliglivet som ble framhevet, noe som avspeilet seg i L97, hvor «Matematikk i dagliglivet» nå var det første overordnede målområdet (KUF, 1996). I de senere læreplanene har også det praktiske og konkrete vært framhevet som viktig i læreplanene (KD, 2006). Noen av disse aspektene går mer på metodiske sider av faget (se delkapittel 4.3), som for eksempel problemløsing og at undervisningen skal ha en praktisk og konkret tilnærming.

Utviklingen av nye læreplaner i Norge er påvirket av internasjonale trender. Ulike betegnelser har blitt brukt om forsøkene på å fornye matematikkfaget og gjøre det lettere tilgjengelig. Mange av disse er det ikke like lett å finne gode norske betegnelser for. Det gjelder for eksempel *numeracy*, eller numeralitet, *mathematical literacy* og *quantitative literacy*. Slik betegnelsen mathematical literacy brukes på engelsk, favner det for eksempel videre enn det norske «matematikk i dagliglivet».

Matematikken er beskrevet som vitenskapen om mønstre og sammenhenger (Devlin, 1994). Det kan dreie seg om å lete etter mønstre og lovmessigheter i en egen matematisk verden, hvor man for eksempel studerer hva som kjennetegner ulike tallmønstre som primtall eller periodiske desimaltall. Det kan også dreie seg om å bruke matematikk til å studere mønstre og lovmessigheter på andre felt, som for eksempel naturfag eller økonomi (Freudenthal, 1983; Steen, 1990). Men matematikk er ikke bare systemet eller produktet, det vi kan kalle svaret på problemet. Det er etter hvert blitt mer vanlig også å ta hensyn til prosessaspektet ved matematikk. «Matematisering» har da blitt brukt som en betegnelse for prosessaspektet. Man er da ikke bare opptatt av løsningen på en oppgave, men retter oppmerksomheten like mye mot selve aktiviteten, den prosessen som foregår når man arbeider med oppgaven. Betegnelsen matematisering brukes også på en litt annen måte, om prosessen med å gå fra et gitt problem i den virkelige verden til å omsette dette til et matematisk språk, slik det er illustrert i figur 4.1.

Forholdet mellom ren og anvendt matematikk har vært en del av diskusjonene av hva som skal være innholdet i skolematematikken. Det på tross av at et slikt skille kan synes noe problematisk i et historisk perspektiv. For eksempel har mange kjente personer i utviklingen av matematisk kunnskap, som Newton, Fermat, Descartes og Gauss, for å nevne noen, ikke lagt vekt på et slikt skille – en indikasjon på at de så på matematikk som noe som skulle undervises i som en helhet (Kline, 1972). På den andre siden har et slikt skille ofte vist seg å være nyttig i diskusjoner om hva som skal være innholdet i matematikk i skolen. Vi vil derfor bruke en modell, se figur 4.1, som brukes mye til å illustrere

Figur 4.1 Forholdet mellom den virkelige verden og den matematiske verden (etter *Standards*, NCMT 1989)



sammenhengen mellom ren og anvendt matematikk. Den internasjonale studien PISA bruker for eksempel en tilsvarende modell som illustrasjon for å beskrive den matematiske kompetansen de tester elevene i (Kjærnsli et al., 2004), det de kaller mathematical literacy. Oppgavene i PISA dekker hele syklusen i figur 4.1. De tar utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden og tester hvor gode elevene er til å analysere problemet, og til å bruke matematikk for å løse det. I TIMSS og TIMSS Advanced testes elevene med oppgaver *både* i ren formell matematikk, det vil si oppgaver uten noen kontekst fra den virkelige verden, og i oppgaver som tar utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden, slik som vist i figur 4.1. For mer om hvilken type matematisk kompetanse som testes i de ulike internasjonale studiene, henviser vi til kapittel 2.

Høyre side av figuren viser den matematiske verden, en egen abstrakt verden med veldefinerte symboler og regler. Venstre side forestiller den virkelige, konkrete verden som omgir oss. Ren matematikk, som arbeid med tall uten å knytte det til problemer fra virkeligheten, vil bare foregå på høyre side av figuren. Å beregne svaret på et addisjons- eller multiplikasjonsstykke eller å finne verdien av x i en likning, er eksempler på arbeid innen ren matematikk. I anvendt matematikk tar man utgangspunkt i et problem fra den virkelige verden. Man må da først gjøre en forenkling og formulere problemet klart, så skal dette matematiseres og ende i en matematisk modell. Deretter arbeider man innen den rene matematiske verden med en transformasjon av den matematiske modellen. Hvis man arbeider med tallsymboler, kan det for eksempel være å foreta en utregning, i algebra kan det være en manipulering med bokstavsymboler. Løsningen man kommer fram til, må være riktig i henhold til de regler som gjelder innen den matematiske verden. Så skal løsningen relateres tilbake til den virkelige verden gjennom en fortolkning av hva dette innebærer for det formulerte problemet. Til slutt skal rimeligheten av svaret valideres i forhold til det opprinnelige problemet. Anvendelse av matematikk forutsetter derfor både at man kan orientere seg med en rimelig sikkerhet i den rene matematiske verden, og at man med utgangspunkt i en virkelig problemstilling kan matematisere og sette opp en modell som man arbeider med, for til slutt å relatere svaret tilbake til problemet i den virkelige verden. Anvendt matematikk er derfor i sin natur kompleks.

Arbeid innen ren matematikk, som utregninger, omforming og manipulering med matematiske symboler, har tradisjonelt hatt en sterk posisjon i skolematematikken. I dette matematiske universet er matematikk en sikker, presis og eksakt vitenskap, hvor teorier og teser kan bevises eller motbevises. I det øyeblikk vi forbinder matematikk med virkeligheten, er ikke matematikk mer presis enn andre typer vitenskap. Enhver anvendelse er forbundet med usikkerhet. Albert Einstein har uttalt at «As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, as far as they are certain, they do not refer to reality» (Humboldt, 2004).

Med økt vekt på anvendelse av matematikk kan det synes som om betydningen av å forstå at matematikk i seg selv er en eksakt og sikker vitenskap, i noen grad har forsvunnet fra skolematematikken (Gardiner, 2004). Formuleringer som «bare en manipulering med symboler» er blitt brukt om matematikk som «bare» opererer på figurens høyre side. Arbeid innen ren matematikk forutsetter i høyeste grad refleksjon og forståelse, men da innen den matematiske verden. Dette kan for eksempel være refleksjon rundt sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon eller forståelse av brøk og desimaltall som ulike representasjonsformer. Å forstå og gi mening til ren matematikk er i seg selv en stor utfordring, selv når vi begrenser det til områdene tall og tallregning. På samme måte trenger man en grunnleggende forståelse av ren algebra, av regler og prosedyrer innenfor det matematiske universet, for å kunne bruke algebra for å løse problemer fra den virkelige verden, det vi kan kalle anvendt matematikk. På samme måte som med tall forutsetter anvendelse av algebra at man har en rimelig god basis i ren algebra.

Gardiner (2004) peker på at det økende fokuset på anvendt matematikk som man har sett i mange vestlige land, som de nordiske, førte til at man i mindre grad la vekt på å gi elevene den nødvendige kunnskapen innen ren matematikk som aritmetikk og algebra. Gardiner argumenterer imot tanken om at anvendelse av matematikk kan sees som *et alternativ til å lære elevene ren matematikk*, eller som en enklere vei til matematisk kunnskap, selv om noen synes å tro det.

> *Mathematical literacy» and numeracy are often presented as though they were alternatives to traditional school mathematics, rather than byproducts of effective instruction.* (Gardiner, 2004, s. 2)

Det synes uproblematisk å akseptere at et viktig mål for undervisningen i skolen skal være at alle utvikler en type kompetanse vi kan betegne som «mathematical literacy», at alle elever skal få de nødvendige kunnskaper for å anvende matematikk på problemstillinger de møter i dagligliv og samfunnsliv. Men innholdet i en slik undervisning for å fremme anvendelse av matematikk på problemer i dagligliv og yrkesliv, er det ikke sikkert at kommer til å inneholde så mye nytt:

> *Mathematics teaching may be less effective than most of us would like; but we should hesitate before embracing the idea that school mathematics would automatically be more effective on a large scale if the curriculum focused first on «useful mathematics for all» (numeracy), with more formal, more abstract mathematics to follow for the few. Experience in England (and elsewhere) suggests that such a program may be possible if one is willing to restrict the initial focus to truly basic material (integers, fractions, decimals, proportion, word problems, algebra and geometry), and to teach it in a way which prepares the ground for subsequent developments; but one should not be surprised if such a program turns out to look strangely like what good mathematics teaching has always been.* (Gardiner, 2004, s. 2)

I L97 ble det på den ene siden framhevet at matematikk skal knyttes til dagligliv og anvendelser, på den andre siden står det i planen at elevene skal få fundamentale kunnskaper og ferdigheter i faget. Men den typen matematikk som er mest anvendbar i dagliglivet, er ikke nødvendigvis den typen matematisk kunnskap som er mest anvendelig i mange yrker og profesjoner. Her er det snakk om en avveining av ulike hensyn, som hvor mye vekt skal man legge på ren matematisk kunnskap med sikte på videre utdanninger og yrker i forhold til mer elementær kunnskap som man trenger i dagliglivet. I et samfunn i stadig utvikling mot mer teknologiske løsninger, og med større utfordringer innen områder som miljø, økonomi og helse, er det nødvendig med en kontinuerlig debatt om å finne den rette balansen her. Men uansett hvilken type matematisk innhold man ønsker å legge vekten på, må man være klar over at enhver anvendelse av matematikk forutsetter en rimelig god kompetanse med grunnleggende faglige fakta, ferdigheter og begreper fra den rene matematikken. Uten dette grunnlaget har man lite å anvende.

På samme måte som mathematical literacy i dag framheves, var det «problemløsing» som ble framhevet for noen år siden. Også når det gjaldt problemløsing, har mange studier pekt på at det er viktig å ha gode elementære faglige kunnskaper og ferdigheter for å være en god problemløser i matematikk

(Bjørkquist, 2001; Schoenfeld, 1992). Hverken mathematical literacy eller problemløsning gjør behovet for grunnleggende faglige kunnskaper i ren matematikk mindre. Den faglige basisen kommer vi ikke utenom, selv om vi vet at mange må slite for å skaffe seg denne. Tall, tallregning og algebra kan man se på som motoren i matematikken. I det ligger det at det er disse fagområdene som er de mest fundamentale, både når det gjelder dagliglivsmatematikk og bruk av matematikk i mer profesjonelle settinger i yrkeslivet. Det betyr ikke at andre fagområder som statistikk og geometri ikke er viktige, men at en forutsetning for å lære statistikk og geometri er at man har elementære kunnskaper i tall og algebra.

Selv om man blir enige om at alle trenger en faglig basis i ren matematikk, har man fortsatt spørsmålet om hva av innholdet i den rene matematikken man skal legge hovedvekten på, i grunnskolen og i den videregående skole. Den delen av ren matematikk som ubetinget er aktuell for alle i skolen, og som danner en nødvendig basis for anvendelser i dagligliv og samfunnsliv, består for en stor del av fakta, ferdigheter og begrepsforståelse innen tall og tallregning. Men i et moderne samfunn i en rivende teknologisk utvikling er spørsmålet om dette er nok, eller om det er andre deler av ren matematikk som mange av elevene, kanskje alle, vil trenge en god basis i. Det fagområdet som da peker seg ut, er algebra. Det betyr ikke at kunnskaper innen ren geometri ikke er viktig, men at algebra, som tall og tallregning, peker seg ut som mer essensiell.

Algebra kan sees på som et matematisk språk som man også trenger for å lære seg geometri eller andre fagområder i matematikk. At man trenger basiskunnskaper i et lands språk for å lykkes i det landet, er allment akseptert. Det samme kan sies om algebra; kompetanse i algebra er essensielt i alle typer utdanninger hvor man bruker dette matematiske språket. Å lære et språk tar tid, det trenger å modnes over tid gjennom systematisk trening og bruk i varierte situasjoner. Det er også allment akseptert at man lettere lærer seg et språk når man er yngre. Til en viss grad kan også det stemme for det matematiske språket algebra, bortsett fra at her lærer man aritmetikk først, før man lærer det man kan se på som en generalisert form av aritmetikken. Også når det gjelder algebra, kan man kanskje ha en fordel ved å legge et visst grunnlag tidlig, på samme måte som med andre språk.

Det har de siste ti–femten årene vært en økende oppmerksomhet omkring det at mange elever i dagens samfunn trenger mer matematisk kunnskap

(Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Nødvendigheten av å se tall og tallregning, aritmetikk, i sammenheng med algebra har også vært framhevet:

> *Traditionally, arithmetic and algebra have been viewed as two distinct domains, with algebra instruction coming years after the first arithmetic concepts are taught (Carraher & Schliemann, 2007). Perhaps this segregation of algebra instruction from arithmetic instruction explains why formal algebra, typically introduced in lower secondary school, presents an immense obstacle for many students.* (Naalsund, 2016)

Den nedtoningen av ren formell matematikk som vi har sett i Norge, er ikke like framtredende i en del andre land. Det tas opp og drøftes i neste delkapittel.

4.3 Vektlegging av faglig innhold i ulike land

Data fra internasjonale komparative studier som TIMSS, TIMSS Advanced og PISA gir oss muligheter til å gjøre analyser med sikte på å si noe om hvilket faglig innhold ulike land legger vekt på i sin undervisning. Denne typen analyser har blitt gjort på data helt fra den første TIMSS- og TIMSS Advanced-studien i 1995. Ofte har man brukt en type clusteranalyse hvor man leter etter det vi kan kalle «item-by-country interactions» for å finne likheter og forskjeller mellom hvilken type faglig innhold ulike land eller grupper av land legger relativt mest eller minst vekt på (Grønmo & Olsen, 2006; Olsen, 2006; se også kapittel 5 i denne boka). Fordi vi her snakker om landenes relative prestasjoner på ulike typer av oppgaver, kan land med ulikt prestasjonsnivå likevel ha samme mønster for *hvilken type faglig innhold* de vektlegger mest i matematikk. Analyser av data fra 8. trinn i den første TIMSS-studien i 1995 konkluderte med at man fant fem grupper av land med klare likhetstrekk for hva som ble vektlagt i matematikk: en nordisk gruppe, en engelskspråklig gruppe, en østeuropeisk gruppe, en østasiatisk gruppe og en tyskspråklig gruppe (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004a). Basert på mange senere analyser av data fra TIMSS, TIMSS Advanced og PISA har man konkludert med at man kan snakke om fire ulike profiler i matematikkundervisning i ulike land som har vist seg å være konsistente over de siste 20 årene, på ulike nivåer i skolen og i ulike studier med ulikt rammeverk for hvilke typer matematisk kunnskap de tester elevene i. Den første analysen av data fra TIMSS 1995 konkluderte med fem ulike profiler for matematikk i skolen, men da den tyskspråklige profilen ikke har vist seg like konsistent over tid og i ulike studier som de andre fire, vil vi i det videre ikke forholde oss til denne. Vi konsentrerer oss om de fire fra den første TIMSS-studien som senere har vist seg å være konsistente over tid, på ulike nivåer i skolen og i ulike studier. Konklusjonene fra den første analysen basert på 1995-data var også at selv om man har fire ulike profiler for innhold i matematikk i skolen, kan man også snakke om *to ulike typer* profiler.

Det baserer seg på at selv om man har fire distinkte profiler for innhold i matematikk i skolen, har *to og to av disse profilene* en del viktige fellestrekk. Den engelskspråklige profilen og den nordiske profilen har klare likhetstrekk, det samme har den østeuropeiske profilen og den østasiatiske profilen. Den østeuropeiske og den østasiatiske profilen legger relativt mest vekt på oppgaver i det vi kan kalle klassisk, ren, formell matematikk som eksakt regning med tall og algebra. I motsetning til dette legger land i den nordiske og i den engelskspråklige profilen relativt liten vekt på klassisk, ren, formell matematikk som eksakt tallregning eller algebra. Hovedvekten i disse profilene er matematikk knyttet til dagliglivet, som overslagsregning, avrunding av tall og statistikk. Dette resultatet har vist seg å være konsistent i senere analyser basert på data fra TIMSS 2003, PISA 2003 og TIMSS Advanced 2008, og er dokumentert i flere artikler (Grønmo et al., 2004; Olsen & Grønmo, 2006).

Analyser av data fra den internasjonale studien av lærerutdanning i matematikk som Norge deltok i, TEDS-M 2008 (Tatto et al., 2012), har vist det samme mønsteret mellom land (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013). Disse analysene er selvsagt avhengige av hvilke land som deltar i de ulike studiene, men de fire profilene har likevel vist seg å være konsistente. Man har derfor svært god dokumentasjon på at man *har* disse profilene av land som har vært stabile over de siste tiårene.

PISA tester elever med oppgaver som hovedsakelig er i en type dagliglivs- eller hverdagskontekst, og har ingen tradisjonelle, rene matematikkoppgaver i for eksempel algebra (Olsen & Grønmo, 2006; Wu, 2009). Se også kapittel 2 i denne boka. TIMSS på ungdomstrinnet tester elevene i oppgaver i tradisjonell, ren matematikk, som tallregning og algebra, og noen oppgaver satt i en mer dagligdags kontekst, men uten å være krevende når det gjelder å lese og analysere en relativt lang tekst. TIMSS Advanced tester elevene i mange tradisjonelle rene oppgaver, for eksempel i algebra og geometri, og i noen oppgaver satt i en hverdagskontekst, men også disse uten å være så krevende når det gjelder å lese og forstå den utenommatematiske konteksten som i PISA. På tross av dette finner vi de samme konsistente profilene av land i alle disse studiene, hvilket styrker konklusjonene om at det er konsistente profiler for hva slags innhold land legger mer og mindre vekt på å lære elevene. TEDS-M 2008-studien testet lærerstudenter i oppgaver både i ren formell matematikk, som løsing av algebraiske likninger, og i oppgaver for hvordan man skal undervise i ulike faglige emner (Tatto et al., 2012). Men de profilene som ble funnet, var de samme, også på dette nivået i utdanningssystemet.

Konklusjonene om ulik vekt på ulikt matematisk innhold understøttes også av andre typer analyser (Hole, Grønmo & Onstad, 2017; Hole et al., 2015), se også kapittel 2 i denne boka. Hva som skal være innholdet i skolematematikken, er derfor ikke et enkelt spørsmål å svare på. Mange vil kanskje tro at i hvert fall i et fag som matematikk vil innholdet være ganske likt i de forskjellige landene. De mange analysene vi har referert til over, viser at dette varierer ganske mye. I et samfunn i stadig utvikling, med nye krav til hva elevene trenger av kompetanse for utdanning og yrkesliv, etterlyser vi en åpen og konstruktiv debatt om dette, med utgangspunkt i de begrunnelsene samfunnet har for å lære elevene matematikk (Niss, 2003). Dette stiller sentrale spørsmål rundt både prioritering og progresjon av faglig innhold i skolen, en helt nødvendig debatt når man nå skal revidere læreplanene i matematikk.

4.4 Undervisning i matematikk i skolen

Hvordan undervisningen legges opp og gjennomføres i skolen, er også et viktig spørsmål som påvirker elevenes læring. Noen lands læreplaner gir klare retningslinjer for hvilke metoder som bør brukes, mens dette i andre land er mer opp til den enkelte skole eller lærer. Dette varierer også over tid i de ulike landene. Flere av læreplanene i Norge de siste tiårene har ikke bare omhandlet hva elevene skal lære, men også metoder for hvordan undervisningen skal gjennomføres. I Norge gjelder det særlig læreplanene fram til kvalitetsreformen i 2006. På 1980–90-tallet var det mye vekt på prosjektorientert undervisning i Norge, som i de andre nordiske landene. Noen av de mest toneangivende på dette feltet var danske forskere, som gjorde seg til talsmenn for at mer eller mindre all undervisning skulle organiseres som prosjekter (Berthelsen, Illeris & Poulsen, 1987). Det interessante er at noen av de forskerne som skrev dette, senere har bedt om unnskyldning og sagt at de tok feil:

> *For tredive år siden, i slutningen af 70'erne, kastede jeg og to andre pædagogiske forskere os ud i et næsten revolutionært projekt: at skrive den første store håndbog i tværfagligt, problemorienteret projektarbejde i folkeskolen. Den blev færdig, udsolgt, revideret og genudgivet, oversat og udgivet i Sverige og Norge, genimporteret, forkortet og udgivet igen på nyt forlag i Danmark. Mange andre lignende bøger fulgte efter. Succesen var total, og i dag tredive år senere er projektpædagogik nærmest blevet til en kongelig rekommanderet forpligtelse overalt i det danske uddannelsessystem, ikke mindst i folkeskolen.* . . .
>
> . . . *Men i dag står jeg – nu ikke som forsker, men som pædagogisk konsulent – i de samme klasseværelser og kan se de katastrofale omkostninger, som den ensidige begejstring for «tværfaglighed og projektarbejde» har medført: Lærerne ved ikke, hvordan elever og kursister kan tilegne sig fundamentale, faglige basiskundskaber på en sådan måde, at de er præsente og brugbare! Vi har nemlig fortrængt hukommelsens betydning for læring. Vi har smadret Den Sorte Skole og smidt barnet ud med badevandet og triumferet bagefter. Det er en katastrofe. Når det kunne komme så vidt, så skyldes det, at vi, der indførte projektpædagogikken, selv havde gået i en skole, hvor vi havde fået kundskaber. Dem tog vi for givet, fordi vi selv havde gået i den. Men vores hadefulde opgør med den vidensorienterede skole var så succesrig, at den i dag er fuldstændig udraderet. Det betyder, at den tværfaglighed, problemorientering og projektarbejde, som børn og unge i dag udsættes for, hviler på et ekstremt skrøbeligt grundlag af manglende fagkundskaber og tilfældige informationer fra internettet.* (Poulsen, 2010)

Det er interessant at forskerne som sto i spissen for innføringen av prosjektarbeid i skolene i Norden, tok for gitt at elevene hadde de grunnleggende kunnskapene de trengte. Som de selv sier: Vi hadde disse kunnskapene selv og tok for gitt at det hadde også elevene som kom etter oss, så vi konsentrerte oss bare om metoden prosjektarbeid.

I Norge på 1990-tallet var problemløsing tatt med som første hovedemne i matematikkplanen (KUD, 1987), og det ble framhevet at det «*skal være en del* *av all matematikkopplæring*». Rundt årtusenskiftet var det også mye oppmerksomhet rundt det som ble kalt diagnostisk undervisning (Brekke, 1995), også det en metodisk tilnærming til hvordan matematikkundervisningen skulle foregå. Læreplanen av 2006, Kunnskapsløftet (LK06) (KD, 2006), som omfattet grunnskolen, videregående skole og voksenopplæringen, førte til mange endringer både av skolens innhold, organisering og struktur. Det ble for eksempel framhevet at det skulle være metodefrihet, i motsetning til planen av 1997 (KUF, 1996) hvor lærerne ble pålagt å ha en viss andel som prosjektundervisning, og hvor metoden problemløsing sto som det første målområdet som «skulle gjennomsyre all undervisning».

Med ny læreplan i 2006/2007 ble læringsmålene tydeliggjort, og det ble understreket at *«Den nye planen gir skolene mer handlefrihet og lærerne mer metodefrihet, sa utdanningsminister Kristin Clemet (H) da hun presenterte læreplanen i dag.»* (Clemet, 2005)

Det er ikke unaturlig at trender skifter over tid. Det som framstår som bekymringsfullt, er at det gjentatte ganger er mer eller mindre én bestemt måte å undervise på i faget som framheves som svaret på utfordringene med å lære elevene matematikk. Det framstår også som problematisk at lærerne i stor grad forventes å følge slike skiftende trender med ganske ensidig vekt på én type metode i undervisningen. I undervisning, som så mange andre steder i samfunnet, er det kanskje *variasjon i metoder* som er viktig. NCTM-rapporten fra 2014 framhevet nettopp behovet for å implementere et bredt spekter av grep og praksiser i undervisningen (NCTM, 2014). Man må også være klar over at ulike elever kanskje lærer best med ulike metoder. Det er antakelig viktigere med variasjon og balanse mellom ulike metoder, enn å lete etter den ene rette metoden.

I tidligere rapporter fra internasjonale studier som TIMSS og TIMSS Advanced har det blitt påpekt at én ting som kjennetegner undervisningen i matematikk i norsk skole, er en ensidighet i bruk av metoder (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Grønmo & Onstad, 2009), mens land som presterer bedre enn oss, i større grad ser ut til å bruke mer varierte metoder. Vi har ikke slike data fra PISA-studien, da de ikke har noe lærerspørreskjema hvor lærerne skal svare på spørsmål om hvordan de legger opp undervisningen. I TIMSS og TIMSS Advanced har både elever og lærere fått spørsmål om undervisningen i klassene.

Analyser av resultater fra tidligere internasjonale studier har også sammenliknet land når det gjelder bruk av elektroniske hjelpemidler som kalkulatorer. Det interessant her er at i flere studier er det land som i liten grad anvender slike elektroniske hjelpemidler som presterer best, ikke land som Norge (og Sverige) som ligger på topp i slik bruk (Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Dette betyr ikke at man ikke skal bruke slike hjelpemidler i skolen, men at man skal vurdere nøye på hvilken måte, når og i hvor stort omfang det er hensiktsmessig for elevenes læring å bruke dem. Det kan være fristende å tro at utstrakt bruk av elektroniske hjelpemidler gir en mye lettere vei til læring, særlig i et rikt land som Norge, som også av den grunn er utsatt for et stort press om å bruke dem fra kommersielle interesser. Men vanskelige utfordringer som hvordan man skal lære elevene matematikk, har sjelden enkle løsninger som å gi dem en kalkulator eller en datamaskin. Det er rimelig å tro at riktig og gjennomtenkt bruk kan være til hjelp, men vi kommer ikke utenom at den grunnleggende faglige forståelsen fortsatt vil komme gjennom systematisk hardt arbeid. Som det sto i PISA-rapporten fra 2004:

> *Hemmeligheten bak god faglig framgang ligger i målbevisst arbeid mot definerte mål. At dette til en viss grad fortoner seg som litt av en hemmelighet i norsk skole, på tross av at det burde være velkjent nok, henger trolig sammen med at målbevisst arbeid mot definerte mål faktisk kan være ganske strevsomt.* (Kjærnsli et al., 2004, s. 260)

Det har vært mye forskning på elevers problemer med å lære matematikk, noe som har ført til et økt fokus på hvordan svake elever lærer faget. Samtidig som det har vært positivt at elever som sliter faglig, får bedre undervisning i skolen, har det kanskje vært litt lite fokus på hvordan elever med interesse og talent for faget lærer (Grønmo, Jahr, Skogen & Wisted, 2014). Et underliggende premiss synes å være at alle elever vil tjene på at vi legger opp undervisningen etter de som sliter faglig. Men elever er forskjellige, og måten de lærer på, er derfor antakelig også ulik. Noen elever liker å jobbe abstrakt, og lærer kanskje best med en mer abstrakt innfallsvinkel, mens andre vil være mer konkrete og praktiske i sin tilnærming. Dette reiser også spørsmålet rundt differensiering i skolen, noe som har kommet mer på dagsorden den senere tid. Dette er et komplisert spørsmål, selv fra et rent faglig perspektiv. Hvis debatten i tillegg mer blir et ideologisk spørsmål, at man er prinsipielt for eller imot differensiering, er det vanskelig å føre en rasjonell debatt. Uansett er dette et så vesentlig spørsmål at man her trenger både mer forskning, mer diskusjon og mer utprøving av hva som ser ut til å fungere positivt. Vi henviser også til kapittel 7 i denne boka som tar opp noen problemstillinger knyttet til differensiering.

Hvordan et land legger opp sin undervisning, både med hensyn til tilnærmingsmåte i undervisningen, og med hensyn til differensiering, varierer mye mellom land. Tiden er kanskje nå moden for å se på og sammenlikne det vi ser i norsk skole med hvordan dette gjøres i andre land. Da tenker vi ikke bare på land som ligger nær oss når det gjelder tradisjoner i matematikk i skolen, og som gjerne har mange av de samme utfordringene som vi har. Vi tenker også på land med andre tradisjoner, ikke minst land som ser ut til å gi elevene bedre muligheter til videre utdanning og yrker gjennom å gi dem en bedre basis i matematikk i grunnskolen og i videregående skole.

I Norge ser man tendenser til at vi bare sammenlikner oss med andre land i Norden, eventuelt utvider det til å gjelde engelskspråklige land eller OECD-land som vi har mye til felles med, med en underliggende holdning om at mange andre land er så ulike oss at sammenlikninger ikke er interessante. Det er da fristende å minne om hva en tidligere norsk statsminister, Lars Korvald, sa i en tale på Stortinget en gang på 1970-tallet: «Norge er et land i verden» (Korvald, 1972). Dette har det blitt fleipet med, men innholdet i utsagnet er kanskje vel så relevant i dag som da det ble sagt.

4.5 Avsluttende kommentarer

Dette kapittelet tar ikke mål av seg til å gi en utfyllende oversikt over skolematematikkens hvorfor, hva og hvordan. Disse spørsmålene er for store og omfattende til at man i en kort artikkel i ei bok kan gjøre det på en fyllestgjørende måte. Hensikten har vært å redegjøre for noen av de trendene man har hatt i skolen de siste tiårene, og som kan antas å ha påvirket elevenes resultater slik vi måler disse i de internasjonale komparative studiene. Vi har lagt vekt på å velge ut forskning med spesiell relevans for det vi tar opp ellers i boka. Kapittelet er derfor å anse som en type bakgrunnsinformasjon for drøftingene i andre deler av boka.

KAPITTEL 5

Prestasjonsprofiler og undervisning i ulike land

Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Marie Vaksvik Draagen
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole

Det er vel kjent fra tidligere forskning at man i internasjonale matematikkstudier som TIMSS, TIMSS Advanced og PISA finner ulike *prestasjonsprofiler* blant deltakende land og utdanningssystemer (Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Onstad, 2013b; Grønmo et al., 2012). Man kan snakke om en typisk *nordisk* profil, en *engelskspråklig* og en *tyskspråklig* profil (eventuelt en mer generell *vestlig* profil), en *østeuropeisk* profil og en *østasiatisk* profil. Disse profilene har å gjøre med de ulike landenes prestasjoner innenfor ulike emneområder som algebra, geometri og så videre. Man måler hvor godt det enkelte land gjør det innenfor et gitt emneområde, for eksempel geometri, sammenliknet med landets prestasjoner innenfor andre emneområder. For hvert land er det altså *differansene* i skår mellom ulike emneområder man studerer. Når man så sammenlikner ulike land og definerer prestasjonsprofiler, er det forskjeller i disse differansene, altså *differanser* i differansene, man ser etter. For eksempel har man i flere tidligere studier funnet at for land som har en typisk *nordisk* profil, er differansen mellom prestasjoner innen *geometri* og prestasjoner innen *algebra* langt større, altså mer positiv, enn tilfellet er for land med en *østasiatisk* profil.

Vi skal i dette kapitlet blant annet se på hvordan prestasjoner i TIMSS matematikk trinn 8 og TIMSS Advanced varierer mellom ulike land når vi benytter kategoriene definert av LC-rammeverket fra kapittel 2. En fordel ved å bruke dette rammeverket er at det ikke refererer til matematiske emneområder, men i stedet til ulike typer matematisk teori. Dette fokusskiftet gjør at analysen løftes opp fra en diskusjon om prioritering av ulike matematiske *emner* til en beskrivelse av hvordan ulike land arbeider med mer generelle aspekter ved matematikk i skolen, for eksempel formelt matematisk språk.

5.1 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS 2011 matematikk

I (Hole et al., 2015) ble det gjort en IRT-analyse (Item Response Theory av typen random item Rasch, se De Boeck, 2008) av sammenhengen mellom LC-kategoriseringen og elevprestasjoner for de norske dataene i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn. Analysen viste at omtrent 19 % av den totale variasjonen i norske prestasjoner på oppgavene kunne tilskrives individuelle forskjeller mellom elevene, og at omtrent 32 % kunne tilskrives variasjon i oppgavenes vanskelighetsgrad. Videre kunne de to dikotomiene F/NF og T/NT til sammen forklare omtrent 23 % av variasjonen i vanskelighetsgrad mellom oppgavene. Kategorien T tilsvarte en ganske liten økning i vanskelighetsgrad ($\beta = 0{,}49$ $(0{,}22)$, $p = 0{,}028$) sammenliknet med mengden av oppgaver kategorisert som både NF og NT, mens kategorien F tilsvarte en stor økning i vanskelighetsgrad ($\beta = 1{,}48$ $(0{,}22)$, $p < 0{,}001$) sammenliknet med NF/NT-mengden. En av konklusjonene vi kan trekke fra dette, er at for de norske dataene leder relevansen av matematiske teoremer *ikke* til noen vesentlig økning i oppgavens vanskelighetsgrad. Dette indikerer at oppgaver som er lite «teoritunge», og som da typisk havner i kategorien NT, gjennomgående ikke er enklere å løse for norske elever enn oppgaver der kjennskap til matematiske resultater (teoremer) er relevant. Videre kan vi konkludere med at involvering av formler i sterk grad tenderte til å gjøre oppgavene vanskeligere for norske elever i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn.

IRT-analysen av de norske dataene fra TIMSS 2011 antyder et mønster som det er interessant å se om man finner også i andre lands data. Når man skal gjøre slike analyser, er det formålstjenlig å se på grupper av land som tidligere har vist seg å ha fellestrekk i sine prestasjonsprofiler. Vi skal her se på følgende tre grupper av land:

- Østasiatisk gruppe: Japan, Hong Kong, Singapore
- Østeuropeisk gruppe: Ungarn, Kazakhstan, Russland, Slovenia, Ukraina
- Vestlig gruppe: England, Finland, Norge, Sverige, Italia, USA

Som nevnt tidligere representerer hver av disse gruppene land som i tidligere forskning har vist fellestrekk i sine prestasjonsprofiler (Grønmo et al., 2004a; Grønmo & Onstad, 2013b). Grunnen til at antall land i de tre gruppene er ulike, er at det er av spesiell interesse for oss fra et vestlig og europeisk perspektiv å se på undergrupper av de to siste gruppene. For eksempel er det av interesse å sammenlikne nordiske land med den vestlige gruppen. For hver gruppe av land slår vi i vår analyse sammen utvalgene av testede elever direkte, som om de alle var fra samme land. Mens dette naturligvis ikke gir oss et representativt utvalg for regionen definert av landene, betrakter vi det likevel som en bedre løsning enn å beregne resultater for hvert land separat og så ta gjennomsnittet i gruppen av land. Et representativt utvalg for regionene som helhet er uansett ikke tilgjengelig. Videre har metoden med direkte sammenslåing den fordel at de teoretiske ulempene med den er enkle å beskrive og forstå. Det er dessuten mulig å argumentere for at de ikke er vesentlige i vår sammenheng.

Når vi går over til å sammenlikne land og regioner av land med hverandre, blir det interessant å se på hvordan de gjennomsnittlige *differansene* i prestasjoner mellom kategoriene F/NF og T/NT varierer mellom landene/regionene. Vi studerer altså differanser i differanser. Vi velger da å gå over fra å bruke plassering på IRT-skalaen til å bruke *p-verdi* (prosent korrekt) som karakterisering av oppgavenes vanskelighetsgrad. I TIMSS finnes det oppgaver som gir 1 poeng og oppgaver som gir 2 poeng. For oppgaver som gir 1 poeng, angir *p*-verdien ganske enkelt prosentandelen som fikk til oppgaven blant de som fikk den på testen. For 2-poengsoppgaver beregnes *p*-verdien ved å addere antall studenter som fikk 1 poeng delt på 2 med antallet som fikk 2 poeng, og deretter dele på totalt antall studenter som ble gitt oppgaven i testen (Martin, Mullis & Hooper, 2016).

En ulempe med å benytte *p*-verdier er at forskjeller i gjennomsnittlig vanskelighetsgrad og liknende i testblokken der oppgaven var plassert, ikke blir tatt hensyn til. I vårt tilfelle er det imidlertid grunn til å anta at disse påvirkningene er uavhengige av kategoriene vi studerer, og at de dermed spiller liten rolle. Fordelen med å bruke *p*-verdiene direkte er at resultatene får en enklere tolkning; en tolkning som forteller mer direkte om forskjellene mellom prestasjonene i ulike land.

Tabell 5.1 viser gjennomsnittlige *p*-verdier for kategoriene F og NF i TIMSS 2011 matematikk 8. trinn for ulike grupper av land. Fra de to første kolonnene ser man hvor store ulikheter i gjennomsnittlige *p*-verdier det faktisk er mellom de ulike gruppene av land. At disse forskjellene er så betydelige, blir mindre synlig når landenes prestasjonsdata kodes på den normaliserte TIMSS-skalaen med senterpunkt 500 og standardavvik 100 (basert på 1995-undersøkelsen). Dette illustrerer en fordel med å benytte *p*-verdier. Vi ser at for oppgaver kategorisert som F, altså som oppgaver der formler er involvert, er gjennomsnittlig *p*-verdi 65 % i den østasiatiske gruppen. I den vestlige gruppen er den gjennomsnittlige *p*-verdien for denne kategorien oppgaver mindre enn det halve, og i Norge er den kun 22,5 %.

Tabell 5.1 Gjennomsnittlige *p*-verdier for oppgavekategoriene NF og F i ulike grupper av land, TIMSS 2011 matematikk 8. trinn.

	Gjennomsnittlig *p*-verdi kategori NF	Gjennomsnittlig *p*-verdi kategori F	Differanse NF–F
Østasiatisk gruppe	71,0 %	65,0 %	6,0 %
Østeuropeisk gruppe	52,9 %	49,4 %	3,5 %
Vestlig gruppe	39,4 %	30,2 %	9,2 %
Norge og Sverige	39,1 %	24,7 %	14,5 %
Norge	39,1 %	22,5 %	16,6 %

Kolonnen lengst til høyre i tabell 5.1 viser differansene i gjennomsnittlige *p*-verdier for oppgavekategoriene NF og F. Her ser vi et bilde som samsvarer godt med tidligere forskning på prestasjonsprofiler i ulike regioner (Grønmo et al., 2004a; Olsen & Grønmo, 2006). For alle gruppene av land er tendensen at oppgaver som ikke involverer formler (NF) faller lettere enn oppgaver der formler spiller en rolle (F). Men differansene varierer mellom gruppene av land. Vi ser at preferanseforskjellen i retning av NF er svakest i den østeuropeiske gruppen. Dette indikerer at landene i denne gruppen i sine tradisjoner for skolematematikk relativt sett legger mer vekt på formelt matematisk språk enn hva tilfellet er i andre regioner. Den nest minste verdien for NF–F finner vi i den østasiatiske gruppen. Denne har imidlertid de suverent høyeste verdiene for både F og NF blant alle gruppene, noe som naturligvis reflekterer disse landenes høye totalprestasjoner på TIMSS-skalaen. For både den østeuropeiske og den østasiatiske gruppen av land kan man imidlertid si at det er en rimelig balanse mellom NF og F, altså mellom prestasjoner på oppgaver som involverer formler og på oppgaver som ikke gjør det. Når vi ser på vestlige land, tegner tabell 5.1 et annet bilde. Her ser vi en betydelig forskjell mellom gjennomsnittlige prestasjoner på oppgaver som involverer formler og oppgaver som ikke gjør det. Forskjellen blir enda større hvis vi begrenser oss til Sverige og Norge, og den er faktisk også mer ekstrem i Norge enn i Sverige. Dette indikerer at på 8. trinn er Norges nedprioritering av formell matematikk ekstrem sammenliknet med andre land.

Ulikhetene i differanser NF–F som man ser i tabell 5.1, reflekterer ulike tradisjoner og kulturer for skolematematikk i ulike deler av verden. Selv om mønsteret man ser kan sies å samsvare med tidligere forskning, er det noen viktige forskjeller. Mens mye tidligere forskning på prestasjonsprofiler av denne typen har dreid seg om prestasjoner på ulike *emneområder* i matematikk, går kategoriene vi opererer med her (F og NF) på tvers av matematiske tema. Variasjon i prestasjonsprofiler over ulike matematiske *emneområder* kan lett tolkes som bare et uttrykk for at ulike land og regioner av land i ulik grad *prioriterer forskjellige matematiske emner*, som algebra, geometri og så videre.

Med kategoriene F og NF ser vi at forskjellene i tradisjoner ligger på et dypere nivå: De er ikke knyttet til prioritering av konkrete emneområder. For eksempel finnes det også TIMSS-oppgaver innen emneområdet geometri som inneholder formler, og som dermed faller i kategorien F. Det er altså ikke kun oppgaver innen algebra som faller i denne kategorien, selv om begrepet «formler» har med algebra å gjøre. Forskjellene vi ser i tabell 5.1 indikerer forskjeller i prioritering av formelt matematisk språk, det er ikke prioriteringer av ulike matematiske emner vi ser på her. En liknende analyse kan gjennomføres for differanser i gjennomsnittsverdier NT–T, men vi skal ikke gå inn på dette.

Ulikheter i prioritering mellom F og NF på dette skolenivået gir oss også informasjon om den langsiktige *progresjonen* i formell matematisk tenkning gjennom skoleløpet i ulike land. Senere i dette kapitlet skal vi se på en sammenlikning mellom Norge og et utvalgt land fra den østasiatiske gruppen, nemlig Singapore, når det gjelder noen eksempler på progresjon knyttet til konkrete matematiske temaer. I den sammenlikningen ser vi på alderstrinn som går fra omtrent siste del av ungdomstrinnet i Norge fram til omtrent starten av Matematikk R1, som er et matematikkurs lagt til 12. trinn. Vi ser altså der på skoleårene som følger like etter nivået der TIMSS 8. trinn måler prestasjoner, og vi konsentrerer oss om den elevgruppen som fortsetter med Matematikk 1T på 11. trinn. Matematikk R1 ligger igjen til grunn for Matematikk R2, som definerer populasjonen Norge deltar med i TIMSS Advanced matematikk.

5.2 Sammenheng mellom LC-kategoriene og prestasjoner i TIMSS Advanced 2015 matematikk og fysikk

I TIMSS Advanced er det såpass få deltakerland at det gir liten mening å se på grupper av land, slik vi gjorde for TIMSS 8. trinn i forrige delkapittel. En direkte sammenlikning med resultatene fra forrige delkapittel umuliggjøres også av at ingen land fra Øst-Asia deltar i TIMSS Advanced. I tilfellet TIMSS Advanced er det derfor mer hensiktsmessig å sammenlikne landene enkeltvis.

Vi starter med fysikk. Som nevnt i kapittel 2 kan LC-rammeverket anvendes også på tester og eksamener i andre fag enn matematikk. Rammeverket måler avhengigheten av matematisk teori (testens «matematikkinnhold») uavhengig av om testen kalles en matematikktest eller ei. Fysikk er naturligvis et godt eksempel i denne sammenhengen, og vi skal se at resultatene vi finner for fysikk, også kaster lys over matematikkfaget, som er vårt anliggende i denne boken. Tabell 5.2 angir differanser i gjennomsnittlige *p*-verdier for oppgavekategoriene NF og F i fysikk for utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015. En nærmere beskrivelse av selve kategoriseringsarbeidet er gitt i kapittel 2.

Tabell 5.2 Gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien NF minus gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien F i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 fysikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NF–F
Norge	7,67 %
Sverige	3,82 %
USA	5,86 %
Russland	−0,21 %
Frankrike	14,04 %
Slovenia	−4,70 %
Portugal	3,18 %

Tabell 5.3 angir tilsvarende differanser i gjennomsnittlige *p*-verdier for oppgavekategoriene NT og T i TIMSS Advanced fysikk.

Tabell 5.3 Gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien NT minus gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien T i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 fysikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NT–T
Norge	13,76 %
Sverige	11,42 %
USA	10,63 %
Russland	5,40 %
Frankrike	19,88 %
Slovenia	5,50 %
Portugal	8,98 %

I tilfellet fysikk har de fire oppgavegruppene F, NF, T og NT alle minst 15 oppgaver. Videre er standardfeilen til p-verdien for alle enkeltoppgaver høyst 3,9 % i alle landene vi ser på, jamfør databasen på www.timssandpirls.bc.edu. Derfor er standardfeilen for gjennomsnittlig p-verdi mindre enn $3{,}9/\sqrt{15}$ i alle de fire gruppene. Standardfeilen for differansene i tabellene 5.2 og 5.3 finnes så ved å multiplisere med $\sqrt{2}$, noe som gir oss omtrent 1,42. Multiplikasjon med 1,96 gir at 95 % signifikansnivå tilsvarer et avvik på litt under 2,8 %. Så differansene i tabellene 5.2 og 5.3 er signifikante hvis de er minst 2,8 %. Med andre ord er de aller fleste av dem signifikante.

Fra tabell 5.2 ser vi at alle land unntatt Russland og Slovenia har en signifikant, positiv differanse mellom de gjennomsnittlige p-verdiene for NF og F, noe som indikerer at elever i disse landene gjennomsnittlig finner oppgaver som involverer formler vanskeligere enn oppgaver som ikke gjør det. Slovenia har en signifikant negativ differanse i tabell 5.2, noe som indikerer at slovenske elever tenderer i retning av å finne oppgaver der formler er involvert *enklere* enn andre oppgaver. Vi ser at alle landene i tabell 5.3 har en positiv, signifikant differanse mellom de gjennomsnittlige p-verdiene for NT og T, noe som betyr at elevene generelt tenderer mot å synes at fysikkoppgaver der kjennskap til matematiske teoremer er relevant, er vanskeligere enn andre fysikkoppgaver. Effekten er mest framtredende i Frankrike, etterfulgt av Norge. Når det gjelder Frankrike, bør det i denne sammenhengen bemerkes at de har en langt høyere dekningsgrad både i TIMSS Advanced fysikk og TIMSS Advanced matematikk enn Norge har, vel 20 % i begge fag for Frankrike sammenliknet med omtrent 11 % i matematikk og 6 % i fysikk for Norge (Grønmo et al., 2016).

Differansen NT–T er mer beskjeden i Russland og Slovenia, parallelt med resultatene i tabell 5.2.

Generelt vil *differansene mellom differansene* for to land i tabell 5.2 og 5.3 være signifikante hvis de overstiger 2,8 % multiplisert med $\sqrt{2}$. Så hvis slike differanser er over 4 %, er de signifikante. For eksempel, siden den norske verdien minus den russiske verdien i tabell 5.3 er rundt 8 %, indikerer tabellen at de norske elevene er signifikant mer «negative» til relevans av matematiske teoremer i fysikkoppgaver enn tilfellet er med russiske elever. Relasjonen mellom fysikkprestasjoner i TIMSS Advanced og mål for matematikkompetanse har tidligere blitt adressert i (Lie, Angell & Rohatgi, 2012) og (Nilsen, Angell & Grønmo, 2013). Man har blant annet funnet indikasjoner på at tilbakegang i fysikk fra TIMSS Advanced 1995/98 til 2008 kan ha sammenheng med svakere kompetanse innen algebra.

Vi går nå over til å se på TIMSS Advanced 2015 matematikk. Som vanlig beregner vi gjennomsnittlig *p*-verdi for mengden av oppgaver klassifisert som F og trekker fra gjennomsnittlig *p*-verdi for mengden av oppgaver klassifisert som NF. Vi får da resultatene i tabell 5.4.

Tabell 5.4 Gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien NF minus gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien F i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 matematikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NF–F
Norge	12,54 %
Sverige	9,79 %
USA	10,53 %
Russland	4,46 %
Frankrike	12,13 %
Slovenia	8,98 %
Portugal	10,96 %

Hvis vi beregner gjennomsnittlig *p*-verdi for matematikkoppgaver klassifisert som NT og trekker fra gjennomsnittlig *p*-verdi for matematikkoppgaver klassifisert som T, får vi resultatene i tabell 5.5.

Tabell 5.5 Gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien NT minus gjennomsnittlig *p*-verdi for oppgavekategorien T i utvalgte deltakerland i TIMSS Advanced 2015 matematikk.

Land	Differanse i gjennomsnitt NT–T
Norge	−2,14 %
Sverige	−1,83 %
USA	5,82 %
Russland	3,46 %
Frankrike	9,74 %
Slovenia	8,57 %
Portugal	10,11 %

For klassifikasjonen av matematikkoppgavene i TIMSS Advanced 2015 inneholder kategoriene T og NT begge minst 15 oppgaver. Kategoriene F og NF inneholder minst 25 oppgaver. Ingen av *p*-verdiene for enkeltoppgavene i matematikk har en standardfeil som overstiger 3,9 % i noen av landene vi ser på (se databasen på www.timssandpirls.bc.edu). En enkel beregning av samme type som tidligere gir at differansene i tabell 5.4 er signifikante hvis de er minst 2,2 %, mens differansene i tabell 5.5 er signifikante hvis de er minst 3 %. Med andre ord er nesten alle differansene i tabellene 5.4 og 5.5 signifikante. Differanser i differansene mellom land vil være signifikante hvis de er over 3,1 % i tabell 5.4 og 4,25 % i tabell 5.5. For eksempel kan vi se fra tabell 5.4 at differansen NF–F er signifikant større i Norge enn i Russland og Slovenia.

I tabell 5.4 ser vi et mønster som har klare likhetstrekk med det tilsvarende resultatet for fysikk i tabell 5.2. De østeuropeiske landene, og særlig Russland, har relativt små differanser i gjennomsnittlig *p*-verdi mellom oppgaver som avhenger av formler og oppgaver som ikke gjør det. Landet med størst verdi for differansen, er Norge.

Resultatene for differansen NT–T i matematikk (tabell 5.5) bryter mønsteret. Her viser de nordiske landene minst differanse NT–T, faktisk har både Norge og Sverige litt høyere gjennomsnittlig *p*-verdi for kategorien T enn for kategorien NT. Dette resultatet er interessant, fordi det ser ut til å være i strid med den generelle regelen om at elever i vestlige land, og spesielt i nordiske land, ikke gjør det bra på oppgaver som krever kjennskap til formell matematikk.

Imidlertid er det flere mulige tolkninger av dette funnet. For eksempel kan resultatet være et uttrykk for at mens norske og svenske elever ikke presterer godt på oppgaver som krever forståelse for «grunnleggende», men likevel formell matematikk, for eksempel algebra, er emneplanene for de aktuelle kursene (Matematikk R2 i Norge) avanserte og omfattende når det gjelder hvilke emner som dekkes. Dette gjør at elevene i Norge og Sverige har kjennskap til mange avanserte teoremer, og at de dermed skårer bedre på en del tungt «teorem-avhengige» oppgaver enn elever fra land med snevrere emneplaner vil gjøre. De kombinerte resultatene fra tabellene 5.4 og 5.5 kan da tolkes som å indikere at mens emneplanene i Norge og Sverige er ganske *brede*, er de lite *dype* i den forstand at formelt matematisk språk og «tekniske» oppgaver ikke vektlegges særlig. Det må imidlertid understrekes at dette kun er et eksempel på en *mulig* tolkning av de nordiske resultatene i tabell 5.5. Mer forskning trengs før man kan si noe sikkert om bakgrunnen.

Det er også av interesse å se på utviklingen i prestasjoner fra forrige gjennomføring av TIMSS Advanced (2008) fram til gjennomføringen i 2015 i lys av LC-klassifiseringen. Vi skal her begrense oss til å se på Norge, og vi skal ta for oss trendoppgavene fra 2008. Dette er altså de oppgavene som var felles for TIMSS Advanced 2008 og 2015. Endringen i differansen NF–F for gjennomsnittlige *p*-verdier i Norge fra 2008 til 2015 er 5,7 prosentpoeng på mengden av trendoppgaver i matematikk. Dette indikerer at elevenes preferanse for oppgaver som ikke avhenger av formler, er blitt styrket fra 2008 til 2015. Endringen i NT–T for gjennomsnittlige *p*-verdier i Norge er derimot −1,6 prosentpoeng, noe som indikerer at norske elever har blitt mer positive til oppgaver som er avhengige av matematiske teoremer fra 2008 til 2015. Dette siste kan indikere at den norske læreplanen er blitt bredere, jamfør ovenfor. Vi kan ikke si noe om signifikans her, men bildet er likevel interessant. Selv om Norge generelt sett går noe fram i matematikk fra TIMSS Advanced 2008 til TIMSS Advanced 2015, øker altså forskjellen NF–F med 5,7 prosentpoeng. Framgangen for Norge fra 2008 til 2015 er med andre ord primært knyttet til kategorien NF, det vil si oppgaver som ikke involverer formler. Siden det typisk er grunnleggende algebra og liknende som er mest relevant for fysikkoppgaver, er det interessant å se den norske tilbakegangen i TIMSS Advanced fysikk fra 2008 til 2015 (Grønmo et al., 2016) i lys av dette. I fysikk øker både differansen NF–F og NT–T i gjennomsnittlige *p*-verdier for trendoppgavene fra 2008 til 2015, med henholdsvis 13 prosentpoeng og 14 prosentpoeng. Her har vi altså indikasjoner på en klar dreining i kvalitativ retning i begge dimensjoner når det gjelder de norske elevene.

5.3 Progresjon og prioritering i ulike land: Singapore og Norge som eksempel

Som beskrevet i delkapittel 2.1 er TIMSS på alle nivåer læreplanorientert. Data fra TIMSS 4. trinn, TIMSS 8. trinn og TIMSS Advanced (13. trinn) gir dermed relevant bakgrunn for sammenlikning av læreplaner i ulike land, blant annet med hensyn til progresjon. I dette delkapitlet skal vi ikke se på prestasjonsdata, men vi skal se et eksempel på en analyse som kan bidra til å kaste lys over norske elevers progresjon innen matematikkfaget. I analysen sammenlikner vi Norge med Singapore. Singapore er et land som på mange måter representerer en annerledes kultur innen matematikkfaget enn den man finner i Norge. For eksempel gir denne kulturforskjellen seg utslag i verdiene for differansene NF–F og NT–T som vi fant for TIMSS i delkapittel 5.1.

Singapore deltar i TIMSS 8. trinn, men i likhet med andre østasiatiske land er de ikke med i TIMSS Advanced. Skal vi studere kulturforskjeller mellom Norge og østasiatiske land, ville naturligvis det ideelle være å bruke et østasiatisk land som deltok begge steder. At dette ikke finnes, er likevel ikke noe vesentlig hinder for den analysen vi skal gjøre her. Vi skal se på læreplaner og lærebøker i de to landene, og målet er å tegne et bilde av hvordan progresjonen er innenfor noen utvalgte matematiske emner. Spesielt er vi ute etter å se hvor lang modningstid elevene i de to landene får innen et knippe konkrete temaer. Temaene selv er i prinsippet tilfeldig valgt, så de kan ikke sies å gi noe annet enn eksempler. Likevel er temaene såpass sentrale for matematikkfaget at de er interessante i seg selv. Vi baserer oss hele veien på resultater fra (Draagen & Helvig, 2015).

Læreplaner i Norge og Singapore

Generelt er matematikklæreplanene i Singapore langt mer detaljerte med hensyn til faglig innhold enn hva tilfellet er i Norge (Draagen & Helvig, 2015). Videre har det i noen singaporske planer vært brukt en dobbel, parallell framstilling av stoffet: (i) En innholdsorientert beskrivelse («Content»), med form av en opplisting av faglige temaer, og (ii) en prosessorientert beskrivelse («Learning experiences»), som gir beskrivelser av hva elevene skal ha mulighet til å arbeide med innen hvert tema. Under (i) finner man i de singaporske læreplanene blant annet utstrakt bruk av eksplisitte formler, noe som er fraværende i norske planer. For å finne et motstykke til beskrivelsen (i) i de singaporske planene i Norge, må man gå tilbake til matematikkplanene fra 1970-årene og tidligere, for eksempel mønsterplanen fra 1974 (KUD, 1974). Den typen framstilling som man finner under (ii) i Singapore, har derimot fellestrekk både med prosessorienteringen man fant i den norske læreplanen fra 1997, altså L97 (KUF, 1996), og med en kompetansebasert framstilling. Prosessorienteringen av matematikkfaget i L97 ble drevet fram og støttet av dominerende strømninger i det norske miljøet innen matematikkdidaktikk. Ved innføringen av Kunnskapsløftet i 2006 (K06) (KD, 2006) ble imidlertid prosessorienteringen forlatt til fordel for en rent kompetansebasert beskrivelse. Tilsynelatende var da også alle didaktiske argumenter for en prosessorientert plan i matematikk glemt. Å bruke et dobbelt format av den typen man finner eksemplifisert fra Singapore på side 45 i (Draagen & Helvig, 2015), ble så langt vi kjenner til, ikke vurdert på høringsnivå ved den norske læreplanrevisjonen i 2006. Det er interessant at mens man i Norge har gått fra innholdsorientering (M74) via prosessorientering (L97) til kompetanseorientering (L06), har man i Singapore altså brukt de to første, og til dels alle tre, parallelt.

Både den norske matematikkplanen i L97 og etterfølgeren i K06 var lite detaljerte, og de var tenkt komplettert med lokalt læreplanarbeid. Mens begrepet «lokalt læreplanarbeid» naturligvis også eksisterer i Singapore, er utgangspunktet for slikt arbeid der langt mer fastlagt. I Norge har en del av den manglende spesifiseringen i læreplanen blitt kompensert for ved ulike typer veiledninger utgitt av Utdanningsdirektoratet og andre aktører. Resten har i praksis blitt overlatt til forlag og lærebokforfattere. Når man legger til at det i Norge, i motsetning til i Singapore, ikke lenger finnes noen offentlig godkjenningsordning for lærebøker, blir det klart at de sentralgitte læreplanene i Norge er langt mindre styrende enn i Singapore. Det er fordeler og ulemper med begge modeller, men det er klart at det singaporske systemet gir større muligheter for å styre langsiktig progresjon på tvers av trinn. De norske matematikkplanene er organisert i treårsbolker, og hvorvidt konkrete temaer innen for eksempel algebra da skal tas på 8., 9. eller 10. trinn, overlates i prinsippet til den enkelte skole, eller til lærebokforfattere. Hvis dette stoffet så er noe det bygges tungt videre på allerede i 11. trinn, kan man i den norske modellen få et problem med ujevn progresjon. Tas avgjørelsen om prioritering og stoffrekkefølge for trinn 8–10 på en skole (eller i en lærebok) som ikke dekker 11. trinn, er det rimelig å spørre om slike hensyn i tilstrekkelig grad blir ivaretatt. Vi skal komme tilbake til dette nedenfor.

Påvirkning fra læreplaner til lærebøker

Et spørsmål man kan stille seg, er i hvilken grad læreplanenes form påvirker lærebøkene rent framstillingsmessig. I (Draagen & Helvig, 2015) finner man en sammenlikning av tre norske lærebøker for ungdomstrinnet med to singaporske bøker fra tilsvarende trinn, samt en sammenlikning av tre norske lærebøker for 11. trinn (Matematikk 1T) med to singaporske bøker som omtrent tilsvarer dette trinnet. Når det gjelder lærebøkenes struktur, finner man her med referanse til rammeverket i (Johansson, 2005) at de norske bøkene preges av strukturen «exposition–examples–exercises». Dette betyr at man har en teorigjennomgang etterfulgt av eksempler, og til slutt oppgaver. I bøkene fra Singapore er det derimot mer av strukturen «activities–course–exercises» (Johansson, 2005). Dette er annerledes ved at hvert nytt tema gjerne introduseres gjennom en aktivitet elevene skal arbeide med, noe som passer godt med prosessdelen av læreplanene i Singapore. Det er interessant å merke seg at den detaljerte opplistingen av innhold i de singaporske planene altså ikke nødvendigvis fører til en «tradisjonell» lærebokframstilling, i den betydningen av ordet «tradisjonell» som har vært brukt som et motstykke til en «reformorientert» matematikkundervisning (NCTM, 1989; Schoenfeld, 2004). Det er heller ikke slik at oppgavene i de singaporske lærebøkene preges av mindre kreativ resonnering og utforsking enn de norske. Tendensen i de undersøkte bøkene er den omvendte (Draagen & Helvig, 2015).

Progresjon i matematikkfaget

Vi skal her se på to eksempler som viser forskjeller i progresjonen på tvers av trinn i Norge og Singapore. I begge eksemplene er konklusjonen at singaporske elever får lengre tid til å la vanskelig matematikkstoff synke inn og modnes. Et slikt knippe av enkeltstående eksempler kan naturligvis framstå som anekdotisk bevisføring for visse læreplanteoretiske konklusjoner, og det er helt klart også mulig å finne eksempler på stoffområder der norske elever har en jevnere progresjon enn singaporske. Likevel kan det hevdes at eksemplene som gis her er symptomatiske for et ganske generelt bilde på trinn 8–11: Progresjonen i Norge med hensyn til sentralt modningsstoff er ujevn. Sammenliknet med Singapore er den norske progresjonen tregere fram til omtrent avslutning av ungdomstrinnet, deretter er den raskere.

Eksempel 1: Modningstid for stigningstall

(Nilsen, 2013) tar opp introduksjon av begrepet *stigningstall* og videre arbeid med dette som et eksempel på et progresjonsproblem i overgangen mellom ungdomstrinnet og videregående skole. I den norske undervisningsradisjonen er det vanlig at stigningstallet for en rett linje i (x, y)-planet defineres som endringen i y-retning når man beveger seg én enhet i økende x-retning. Som en introduksjon av begrepet har denne tilnærmingsmåten mange fordeler. Imidlertid etterlyser Nilsen arbeid med mer fleksible metoder for å finne stigningstall på ungdomstrinnet. For eksempel er det sentralt for senere arbeid med å forstå begrepet *den deriverte* av en funksjon at elevene er kjent med beregning av stigningstallet etter en formel av typen

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Skrivemåten med bokstaven Δ for å markere endring i en størrelse er ikke det sentrale her; det sentrale er at man kan finne stigningstallet ved å se på endring i y delt på endring i x også i tilfeller der endringen i x ikke er 1. Dette er som kjent helt avgjørende for at elevene senere kan mestre abstraksjonsspranget det innebærer å la endringen Δx i x gå mot 0. Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer at tiden det tar fra begrepet *stigningstall* for en rett linje introduseres til begrepet *den deriverte* introduseres, er mye kortere i Norge enn i Singapore. I de norske lærebøkene kan introduksjonen av stigningstall typisk finne sted på 10. trinn, altså kun ett år før derivasjon introduseres i Matematikk 1T. I de analyserte lærebøkene fra Singapore introduseres stigningstall omtrent 3 år før begrepet derivasjon. I tillegg presenteres ikke en generell formel for stigningstall i de norske lærebøkene for 10. trinn, man baserer seg primært på tenkningen som tilsvarer $\Delta x = 1$. I de singaporske bøkene tilsvarende ungdomstrinnet arbeides det med mer varierte uttrykksformer og strategier for stigningstall; man snakker om *rise/run*, *vertical change* og *horizontal change*. Dette gjør at man i den norske tradisjonen får en mye raskere progresjon tilknyttet dette temaet senere. Elever som går videre til Matematikk 1T på 11. trinn, vil oppleve at den generelle tenkningen rundt begrepet stigningstall, med formelen $\Delta y/\Delta x$, introduseres kun noen måneder før de må ta et nytt sprang i abstraksjon: Da skal de arbeide med grenseprosesser der Δx beveger seg mot 0. Konsekvensen av denne raske progresjonen, som i den norske tradisjonen kompenserer for manglende progresjon og modning gjennom ungdomstrinnet, kan bli at elevene faller av faglig.

Eksempel 2: Modningstid for algebraiske lover

Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer at tendensen i norske lærebøker er å utsette den mer avanserte algebraen til 10. trinn. Dette muliggjøres av at den norske læreplanen kun opererer med treårsbolker. Progresjonen innen algebra i de norske bøkene er også rykkvis. Et symptomatisk eksempel fra en norsk lærebok er at den algebraiske loven $ax + ay = a(x + y)$ introduseres relativt kort tid før elevene skal transformere uttrykk der de må bruke *sammensatte regneuttrykk* i rollene som a, x og y. Et eksempel på en omskriving av sistnevnte type er

$$7xyz + 21x^3y^2 = 7xy(z + 3x^2y)$$

Her brukes loven $ax + ay = a(x + y)$ med $7xy$ i rollen som a, z i rollen som x og $3x^2y$ i rollen som y. Dette er en tenkning som man kan argumentere for at ligger på et høyere abstraksjonsnivå enn det som tilsvarer kun den underliggende distributive loven $ax + ay = a(x + y)$. De norske elevene får altså liten tid til modning for den distributive loven før de skal bruke den i mer avanserte sammenhenger. I lærebøkene fra Singapore introduseres den distributive loven $ax + ay = a(x + y)$ allerede i 8. trinn. Mer avansert bruk av loven, som den vi viste et eksempel på ovenfor, kommer så i 9. trinn. Her er altså progresjonen ikke så rask som i Norge; elevene har et års modningstid for selve loven før man tar det neste spranget. Kort oppsummert er forskjellen at man i Singapore *starter tidligere*.

Lærebokanalysen i (Draagen & Helvig, 2015) indikerer også at singaporske lærebøker bruker generelle formler i forbindelse med funksjonslære på et tidligere tidspunkt enn de norske bøkene for ungdomstrinnet. I Singapore beskrives en lineær funksjon ved å bruke likningen $y = mx + c$ på trinnet som tilsvarer 8. trinn i Norge. I noen av de norske bøkene nevnes ikke lineære funksjoner på 8. trinn, i andre benyttes uttrykksmåter som «y lik x ganger et tall pluss et tall». Også denne forskjellen kan bidra til lengre modningstid for grunnleggende algebra i Singapore.

Det norske progresjonsproblemet vedrørende algebra på dette nivået har mange fellestrekk med eksemplet vedrørende stigningstall som ble diskutert ovenfor. I Norge markerer sluttfasen av Matematikk 1T (11. trinn) per i dag et punkt hvor det gjøres et abstraksjonssprang som bygger på *både* begrepet stigningstall *og* generell forståelse for algebra. Når teorien for derivasjon introduseres, kommer man til en type teori som ikke engang lar seg *formulere* uten utstrakt bruk av variabler. Har elevene mangelfullt utviklet forståelse for algebra på dette tidspunktet, er instrumentell læring i fortsettelsen en naturlig konsekvens.

5.4 Oppsummering

Resultatene vedrørende sammenhengen mellom elevprestasjoner og oppgavenes avhengighet av matematisk teori beskrevet i delkapitlene 5.1 og 5.2 viser at det er ulike kulturer og tradisjoner knyttet til matematikkundervisningen i ulike land og i ulike deler av verden. Resultatene indikerer at disse forskjellene ikke nødvendigvis er knyttet til ulik prioritering av ulike matematiske emneområder, men at de har å gjøre med ulik vektlegging av formell matematikk. Resultatene fra TIMSS Advanced fysikk viser at de kulturelle forskjellene knyttet til matematikk også kan ha konsekvenser utenfor matematikkfaget selv. Nedprioritering av formell matematikk kan resultere i progresjonsproblemer når man ser skoleløpet under ett. Sammenlikningen med Singapore i seksjon 5.3 viser eksempler på problemer som oppstår i den norske modellen, der elevene får kort modningstid for viktig fagstoff i tidsperioden fra 10. trinn til slutten av Matematikk 1T.

KAPITTEL 6

Prioritering og nedprioritering av fagområder i matematikk

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Ingvill Merete Stedøy
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Matematikksenteret, NTNU, Trondheim

I dette kapitlet analyserer vi data fra TIMSS Advanced i det siste året i videregående skole og fra TIMSS i grunnskolen med siktemål å få bredest mulig informasjon om hva som vektlegges av innhold i den implementerte læreplanen i norsk skole. Ved å analysere data fra grunnskolen får vi informasjon om hvilket grunnlag elevene har for videre læring. Det har betydning for deres muligheter til læring av matematikk i videregående skole, og det vil kunne være en faktor som påvirker om de velger matematikk utover det som er obligatorisk.

I grunnskolen sammenlikner vi elevenes prestasjoner på det området hvor de presterer svakest med det området hvor de presterer best. På ungdomstrinnet er det algebraprestasjoner som settes opp mot prestasjoner i statistikk, på barnetrinnet vil vi gjøre en tilsvarende sammenlikning mellom tall og statistikk. Vi sammenlikner de norske resultatene med resultater fra andre land, og drøfter disse i en skolepolitisk kontekst. Her trekker vi også inn resultater fra TEDS-M 2008, som var en studie av matematikkdidaktikk innen lærerutdanning. Siktemålet er å reise en bred debatt om innhold i, og konsekvenser av, den vektlegging av matematisk kunnskap som vi har i norsk skole.

Læreplanene i Norge, som i andre land, beskriver de viktigste kunnskapene som elevene skal undervises i (KD, 2006; KUF, 1994, 1996). Det finnes ulike måter og betegnelser som kan brukes for å beskrive det innholdet elevene skal lære, men noen områder som er gjennomgående i de norske læreplanene er tall og tallregning, geometri og statistikk, og fra mellomtrinnet også algebra. På lavere trinn i skolen nevnes måling som et eget område, på ungdomstrinn og i videregående skole kommer området funksjoner inn.

De internasjonale studiene TIMSS og TIMSS Advanced bruker mange av de samme betegnelsene på det innholdet de tester elevene (Mullis & Martin, 2013; Mullis & Martin, 2014; Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016b; Mullis, Martin, Goh & Cotter, 2016). Flere sammenlikninger av norske læreplaner og rammeverkene for de internasjonale studiene har pekt på at det er stort samsvar mellom hva som testes av innhold i studiene og hva som vektlegges av innhold i norske læreplaner (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2012; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), selv om selve betegnelsene noen ganger kan være litt ulike. Et slikt samsvar er å forvente, siden rammeverket i både TIMSS og TIMSS Advanced bygger på en konsensus mellom de deltakende landene om hva som er sentralt faglig innhold å vektlegge i undervisningen av elever (Mullis & Martin, 2013; Mullis & Martin, 2014). I TIMSS Advanced bruker man de tre fagområdene *algebra*, *geometri* og *kalkulus*. Det siste er en betegnelse som ikke brukes i norske læreplaner for videregående skole, men innholdet som beskrives i dette fagområdet er likevel inkludert i de norske planene. Hovedelementer i fagområdet kalkulus i TIMSS Advanced er grenser, derivasjon og integrasjon. Dette er temaer som i norske planer inngår i beskrivelsen av fagstoff tilknyttet *funksjoner* (KD, 2006).

6.1 Norske elevprestasjoner i videregående skole

Det generelle prestasjonsnivået for elever med full fordypning i matematikk i det siste året på videregående skole varierer en god del mellom land. Det samme gjør elevenes prestasjoner på de tre fagområdene som TIMSS Advanced tester dem i: algebra, geometri og kalkulus. Tabell 6.1 (Mullis, Martin, et al., 2016b) viser landenes generelle prestasjonsnivå, og hvordan elevenes prestasjoner på disse tre områdene avviker fra landets generelle nivå. Dette gir oss indikasjoner på hvilken vekt de ulike landene legger på de forskjellige fagområdene som testes i TIMSS Advanced, hvilke prioriteringer de gjør vedrørende faglig stoff.

Figur 6.1 gir en visuell framstilling av situasjonen i Norge basert data fra på tabell 6.1. Som det framgår, er det ett fagområde hvor norske elevers prestasjoner ligger lavere enn det generelle prestasjonsnivået for Norge, det er algebra. På de to andre områdene, geometri og kalkulus, ligger de norske resultatene over det generelle norske nivået.

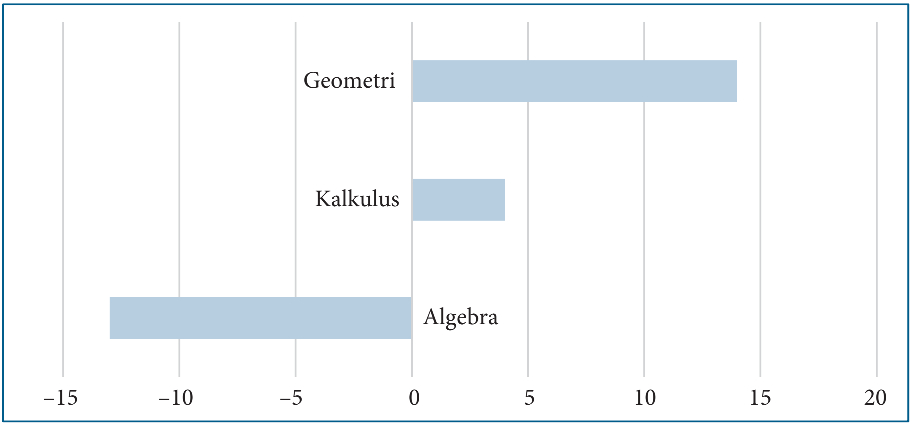
Tabell 6.1 Prestasjoner fordelt på fagområder i matematikk, TIMSS Advanced 2015.

Land	Totalskår matematikk	Algebra (37 oppgaver)		Kalkulus (34 oppgaver)		Geometri (30 oppgaver)	
		Skår	Forskjell fra totalskår	Skår	Forskjell fra totalskår	Skår	Forskjell fra totalskår
Libanon	532 (3,1)	525 (4,0)	-6 (3,6)	544 (3,9)	12 (2,8) ▲	526 (3,7)	-6 (2,3) ▼
USA	485 (5,2)	478 (5,0)	-7 (1,7) ▼	504 (6,0)	19 (2,9) ▲	455 (5,7)	-30 (2,6) ▼
Russland	485 (5,7)	495 (6,3)	10 (1,9) ▲	459 (5,9)	-26 (1,2) ▼	500 (5,8)	15 (1,0) ▲
Portugal	482 (2,5)	495 (2,7)	12 (1,5) ▲	476 (2,6)	-6 (1,4) ▼	464 (3,2)	-18 (1,5) ▼
Frankrike	463 (3,1)	469 (2,9)	7 (1,8) ▲	466 (3,2)	3 (1,8)	441 (3,7)	-22 (1,3) ▼
Slovenia	460 (3,4)	474 (3,5)	14 (1,1) ▲	437 (4,4)	-23 (2,0) ▼	456 (4,0)	-4 (1,4) ▼
Norge	459 (4,6)	446 (4,1)	-13 (1,6) ▼	463 (5,3)	4 (1,5) ▲	473 (4,6)	14 (2,0) ▲
Sverige	431 (4,0)	422 (4,1)	-9 (1,2) ▼	438 (3,9)	7 (1,5) ▲	430 (3,7)	-1 (1,4)
Italia	422 (5,3)	414 (5,1)	-8 (2,2) ▼	433 (5,2)	11 (2,7) ▲	413 (5,7)	- 9(3,2) ▼

▲ Områdeskår signifikant høyere enn totalskår i matematikk
▼ Områdeskår signifikant lavere enn totalskår i matematikk

KILDE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2015

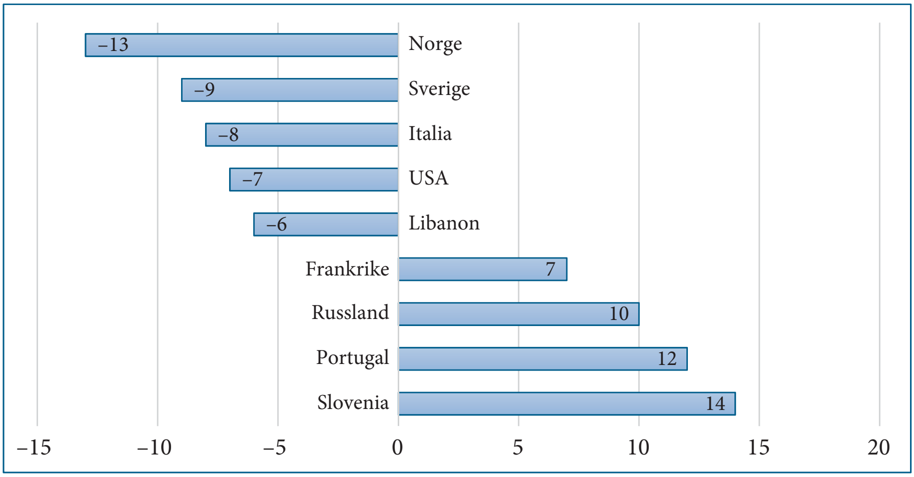
Figur 6.1 Relativ skår på ulike fagområder i matematikk for Norge i TIMSS Advanced 2015.



Dette er et resultat som samsvarer med det som har vært påpekt i mange tidligere rapporter og artikler de siste tiårene (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turmo, 2004; Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2012; Grønmo et al., 2010), at algebra igjen og igjen utmerker seg som det området hvor norske elevers prestasjoner er svake.

Fra et norsk perspektiv er det interessant å se hvilken vekt det ser ut til at andre land i studien legger på algebra, det området som framstår som mest problematisk sett med norske øyne. Figur 6.2 gir en visuell framstilling av

Figur 6.2 Avvik i skår på fagområdet algebra relativt til landenes generelle prestasjonsskår, TIMSS Advanced 2015.



hvilke land som presterer relativt bedre i algebra enn eget generelle nivå, og hvilke land som presterer relativt svakere enn landets generelle prestasjonsnivå.

I fire land, Slovenia, Portugal, Russland og Frankrike, ligger elevenes faglige prestasjoner i algebra høyere enn landets generelle prestasjonsnivå. I de fem andre landene i TIMSS Advanced, Norge, Sverige, Italia, USA og Libanon, ligger elevenes faglige prestasjoner i algebra under deres generelle prestasjonsnivå. Norge er det landet som har *størst avvik i disfavør av algebra*, med Sverige på neste plass. I neste delkapittel ser vi på elevenes prestasjoner på ungdomstrinnet på ulike fagområder i matematikk, med et spesielt fokus på elevenes prestasjoner i algebra. Det er rimelig å anta at elevenes grunnlag fra ungdomstrinnet i algebra vil ha betydning for deres prestasjoner i videregående skole på dette området. Ikke minst fordi matematikk generelt, og kanskje algebra spesielt, kan sees på som en type kunnskap som trenger å modnes over tid for å befestes, slik at den kan anvendes på en hensiktsmessig måte i ulike kontekster og for løsning av ulike problemer. Mange av oppgavene i TIMSS Advanced i geometri og kalkulus forutsetter for eksempel at elevene har elementære kunnskaper i algebra.

Algebraens abstrakte og generelle karakter framheves ofte som noe som gir mange elever problemer med å lære det. Spørsmålet blir da hvordan vi forholder oss til dette. Når noe er abstrakt og trenger modning er det kanskje en bedre løsning å starte med dette tidlig slik at denne typen kunnskap får anledning til å modnes over tid. Tidligere norske læreplaner har vært inne på dette.

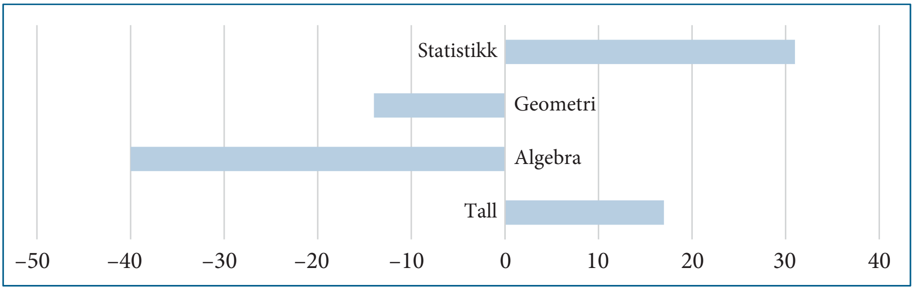
Mønsterplanen for grunnskolen fra 1974 framhevet at algebraiske lover var en vesentlig del av det elevene skulle lære fra mellomtrinnet (KUD, 1974). I neste delkapittel vil vi undersøke nærmere hvilket grunnlag i algebra de norske elevene har fra grunnskolen, og sammenlikne det med hvilket grunnlag elever får på dette nivået i skolen i andre land.

6.2 Norske elevers prestasjoner på ulike fagområder i TIMSS på ungdomstrinnet

På ungdomstrinnet i TIMSS testes elevene i tall, algebra, geometri og statistikk. Dette samsvarer i stor grad med de områdene som beskrives i norsk læreplan, bortsett fra at måling inngår som en integrert del av fagområdet geometri i TIMSS, mens det er et eget område i de norske læreplanene. Men innholdet som beskrives er i stor grad det samme (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Det er interessant å se på hvor godt norske elever presterer på de ulike fagområdene i TIMSS; det gir oss gode indikasjoner på hva som vektlegges i undervisningen i grunnskolen i matematikk, hva som prioriteres av faglig stoff.

Figur 6.3 viser hvilke fagområder i matematikk hvor norske elevers prestasjoner er over eller under Norges generelle prestasjonsnivå på samme måte som i figur 6.1 for videregående skole. Det er ett område som framstår som lite vektlagt i Norge, nemlig algebra, og ett område som framstår som mye vektlagt, nemlig statistikk. Her presenterer vi de norske resultatene for elevene på 9. trinn i Norge. Vi får et tilsvarende bilde for de norske elevene på 8. trinn, men her er forskjellen mellom den relative vekten på statistikk og på algebra

Figur 6.3 Norges avvik i skår på fagområder relativt til Norges generelle prestasjonsskår, TIMSS 9. trinn 2015.



enda større. Disse resultatene samsvarer med hva som har blitt dokumentert gjentatte ganger de siste tiårene, utfordringene i norsk skole er at våre elever presterer alarmerende svakt i algebra.

Både i norske læreplaner og i rammeverkene for de internasjonale studiene vektlegges det innhold som man kan kalle ren, formell matematikk, og innhold som man kan kalle anvendelser av matematikk på ulike problemer for å løse oppgaver med en kontekst utenfor den rene matematikken, fra det man kan kalle den reelle virkeligheten vi omgir oss med. I TIMSS testes elevene både i det vi kan kalle rene matematikkoppgaver, og i oppgaver hvor de anvender for eksempel kunnskaper de har i tall eller algebra for å løse problemer i en virkelighetsnær kontekst.

Ren, formell matematikk vil være en betegnelse som det er mest dekkende å bruke på oppgaver hvor elevene skal løse oppgaver for eksempel på områdene tall eller algebra med en ren matematisk problemstilling, uten noen referanse til en virkelig verden. Jamfør diskusjoner i kapittel 2 og 4. Anvendt matematikk vil da være problemstillinger hvor elevene for eksempel skal bruke det de har lært om tall for å løse et problem gitt i en mer eller mindre realistisk virkelighetsbeskrevet kontekst. Tilsvarende på området algebra, at elevene får et problem i en kontekst utenfor den rene matematikken som de skal løse ved å anvende sine algebraiske kunnskaper.

Den grunnleggende rene, formelle matematikken som læreplanene i Norge og andre land legger vekt på at elevene skal lære, er tall, algebra og geometri. Sentrale områder i norsk læreplan som måling og statistikk kunne, om man ønsket det, inngå som en del av området tall, selv om man i den norske planen har valgt å skille det ut som egne områder. I rammeplanene i TIMSS på barne- og ungdomstrinn har man valgt å skille ut statistikk som eget område, men la måling inngå i området geometri. Som det ble redegjort for i et tidligere kapittel i denne boka, så er kunnskaper i formell, ren matematikk en forutsetning for å kunne anvende matematikk. For mer om et matematikkdidaktisk perspektiv på dette, se kapittel 4.

Vi nevnte innledningsvis i dette kapittelet at statistikk er det området hvor norske elever i studie etter studie har vist at de presterer best. I dagens TIMSS Advanced testes ikke elevene i statistikk. Statistikk var med som fagområde i studien i 1995, men ikke i 2008 eller 2015. Fra 2008 valgte man å konsentrere seg om de tre fagområdene algebra, geometri og kalkulus, da de ble vurdert til å være de mest sentrale fagområdene i matematikk for disse elevene (Grønmo et al., 2010).

Tabell 6.2 Elevenes prestasjoner i algebra og statistikk relatert til landets generelle prestasjonsnivå. Positive verdier indikerer at landets elever presterer dette antallet poeng bedre enn landets generelle nivå, negative verdier indikerer at landets elever presterer dette antallet poeng under landets generelle nivå. Femte kolonne angir forskjellen i skår mellom disse to områdene i landene. Land med overvekt over 20 poeng i favør av statistikk er angitt i rødt, land med overvekt for algebra over 20 poeng er angitt i blått. Elevenes alder er angitt i siste kolonne.

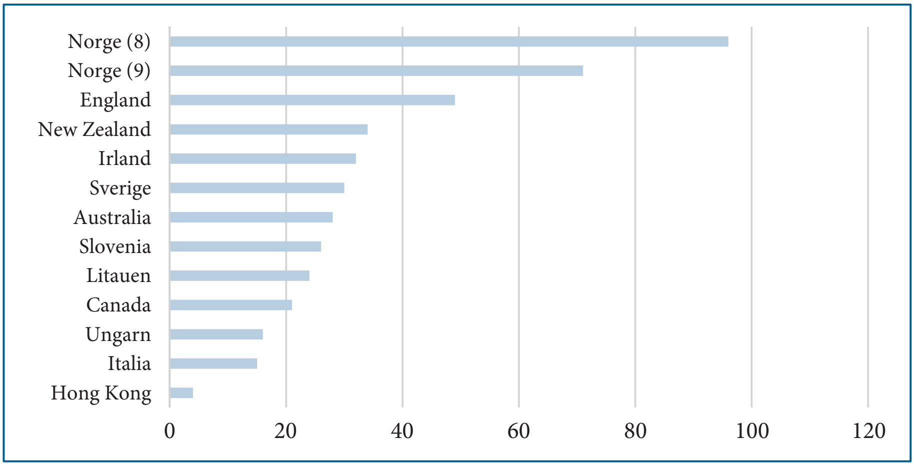
Land	Algebra avvik	Statistikk avvik	Generelt nivå	Forskjell A og S	Alder
Australia	−14	14	505	28	14
Canada	−14	7	527	21	14
England	−26	23	518	49	14,2
Hong Kong	−1	3	594	4	14,2
Irland	−22	10	523	32	14,4
Israel	6	−8	511	14	14
Italia	−13	2	494	15	13,8
Japan	9	3	586	6	14,5
Kasakhstan	27	−36	528	63	14,3
Sør-Korea	6	−6	606	12	14,4
Litauen	−14	10	511	24	14,7
Malta	−1	−7	494	6	13,8
New Zealand	−18	16	493	34	14,1
Norge 9. trinn	−40	31	512	71	14,7
Norge 8. trinn	−63	33	487	96	13,7
Russland	20	−31	538	51	14,7
Singapore	2	−4	621	6	14,4
Slovenia	−18	8	516	26	13,8
Sverige	−19	11	501	30	14,7
Taiwan	14	−11	599	25	14,3
Ungarn	−12	4	514	16	14,7
USA	7	4	518	3	14,1

Tabell 6.2 viser forskjeller mellom ulike lands generelle skår i TIMSS 2015 matematikk 8. trinn og deres skår innen fagområdene algebra og statistikk. For eksempel er Australia listet med −14 i kolonnen for algebra, noe som betyr at Australias skår innen fagområdet algebra var 14 poeng lavere enn deres totalskår på 505 poeng. Altså var algebraskår for Australia 491 poeng. Tabellen angir også (den absolutte) forskjellen mellom landenes skår i algebra og statistikk. Tabellen inkluderer alle land som har et generelt prestasjonsnivå over 470 på måleskalaen som brukes i TIMSS og TIMSS Advanced. Som kjent har denne måleskalaen et standardisert senterpunkt på 500 poeng, se kapittel 14. Landene med svakere generelle resultater enn 470 er i hovedsak land med langt mindre ressurser enn Norge og/eller andre tradisjoner når det gjelder å sikre en god utdanning til alle landets borgere (Bergem et al., 2016; Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016a).

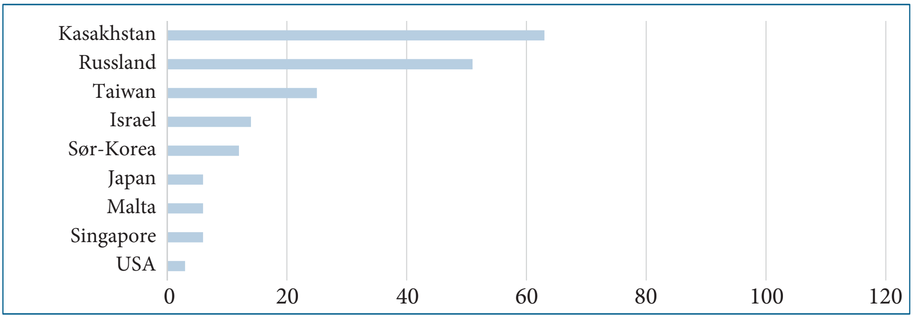
Som det framgår av tabell 6.2 er det noen land som utmerker seg med svakere relative resultater i forhold til sitt eget generelle prestasjonsnivå i statistikk, mens andre viser den motsatte profilen, svakere relative resultater i algebra. Det er særlig nordiske og engelskspråklige land som utmerker seg med å ha en stor forskjell mellom prestasjoner i statistikk og algebra i favør av statistikk. Selv om det finnes unntak, samsvarer dette gjennomgående godt med resultatene fra mange tidligere analyser av hvilket matematisk innhold som vektlegges i ulike land, det som har blitt betegnet som ulike profiler i matematikkundervisning i ulike grupper av land (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Onstad, 2013b; Olsen & Grønmo, 2006). Se også kapittel 5. Det landet som utmerker seg med å ha den klart største forskjellen i favør av statistikk, er Norge. Avstanden mellom den relative vektleggingen på disse to områdene er på 96 poeng på 8. trinn og 71 poeng på 9. trinn. Det landet som ligger nærmest oss i å ha stor forskjell i favør av statistikk er England med 49 poengs forskjell, i resten av landene er forskjellen mindre enn 35 poeng. Forskjellen i Sverige, et land som har mye til felles med Norge, er 30 poeng. Altså mindre enn halvparten av hva vi ser i Norge.

Figur 6.4 illustrerer differanser mellom skår i statistikk og skår i algebra i ulike land, i favør av statistikk. Igjen tar vi med resultatene for både 8. og 9. trinn i Norge.

Figur 6.4 Skår i fagområdet statistikk minus skår i fagområdet algebra for land der denne differansen er positiv, altså land som skårer bedre i statistikk enn i algebra, TIMSS 2015.



Figur 6.5 Skår i fagområdet algebra minus skår i fagområdet statistikk for land der denne differansen er positiv, altså land som skårer bedre i algebra enn i statistikk, TIMSS 2015.



Figur 6.5 illustrerer differanser mellom skår i algebra og skår i statistikk i ulike land, i favør av algebra. Noen land skiller seg ut med klart bedre resultater relativt til eget prestasjonsnivå i algebra enn i statistikk: Kasakhstan, Russland og Taiwan. Også dette er resultater som stemmer overens med tendensen i mange tidligere analyser av hva som kjennetegner matematikkprofilene i land i Øst- Europa og Øst-Asia (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Olsen & Grønmo, 2006; Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013).

Det er verdt å merke seg at flere land ser ut til å ha liten forskjell i vekt-leggingen av disse to fagområdene. I land som Hong Kong, Japan, Singapore, USA og Malta er forskjellen mellom disse to fagområdene under 10 poeng. At forskjellen i landene er så vidt liten kan være en indikasjon på at landene har funnet en form for likevekt i hva elevene undervises i. Særlig interessant er det at dette gjelder mange av de asiatiske landene som generelt er høytpresterende. Dette er noe som det kan være interessant å studere nærmere for å få nye innspill til vår egen skoledebatt.

Rapporter fra både TIMSS, TIMSS Advanced, PISA og den internasjonale studien av lærerstudenter TEDS-M 2008, har alle pekt på at norske elever og lærerstudenter presterer svakt i algebra (Bergem et al., 2016; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Grønmo et al., 2004b; Grønmo, Hole & Onstad, 2016; Grønmo & Onstad, 2012; Grønmo et al., 2012). Årsaken til at norske elever gjennomgående har prestert svakt i algebra har vært diskutert flere ganger når resultatene fra internasjonale studier har blitt publisert (ibid.). Det har flere ganger blitt pekt på at grunnen kan være at norske elever i flere TIMSS-studier har vært yngre enn i en del andre land. «*Noe av forklaringen på det veldig svake resultatet i fagområdet Algebra kan være at norske elever er blant de yngste i TIMSS 2011*» (Grønmo et al., 2012, s. 26). Dette ser ikke ut til å være den viktigste årsaken til svake prestasjoner i Norge. I TIMSS 2015 gikk Norge opp ett årstrinn i hva som defineres som deres hovedpopulasjon i studien. Nå er norske elever blant de eldste, slik det framgår av tabell 6.2. For norske elever på 8. trinn er forskjellen i disfavør av algebra enda større, hele 96 poeng, det vil si nesten et helt standardavvik. TIMSS-studien har et fast midtpunkt på 500 poeng med et standardavvik på 100 (Mullis & Martin, 2013). Årsaken til de svake norske resultatene i algebra på ungdomstrinnet i Norge stikker mye dypere enn at det var alderen til elevene som førte til det. Vi skiller oss fortsatt ut internasjonalt med svært svake resultater på dette fagområdet, selv om våre elever nå enten er jevngamle eller eldre enn i andre land. Det framgår av den internasjonale rapporten fra TIMSS 2015 at norske elevers prestasjoner på fagområdet algebra er svakere enn alle land bortsett fra land med lite ressurser til utdanning og arabiske land. For eksempel presterer svenske elever generelt svakere i matematikk på ungdomstrinnet enn de norske, men i algebra presterer elevene i vårt naboland vel så godt som oss.

Det avspeiler seg i læreplaner i de fleste land for mellom- og ungdomstrinn at man både legger vekt på å lære elevene algebra og legger vekt på en del grunnleggende statistikk. Man kan si at statistikk i særlig grad kan knyttes til utviklingen i skolen de siste tiårene med mer vekt på dagliglivsmatematikk. For mer om dette, se kapittel 4. Spørsmålet er i hvilken grad det faglige grunnlaget som elevene får med seg fra grunnskolen, også tar hensyn til og lærer elevene den typen matematikk mange av dem vil trenge for videre utdanninger og yrker.

Vi bør også merke oss der hvor de internasjonale studiene viser klar og stabil framgang i norske elevers faglige kunnskaper. TIMSS-studiene for grunnskolen har vist en positiv utvikling i småskolen når det gjelder elevenes kunnskaper i matematikk etter nedgangen fra 1995 til 2003.

> «*Fra og med 2003 har det imidlertid vært en fin stigning i prestasjonsnivået for de norske elevene på dette trinnet. Denne framgangen har imidlertid ikke fortsatt i den siste fireårsperioden. Gjennomsnittet for Norge (4) har gått fra 495 til 493 poeng. Dette er ikke en signifikant endring i skår, men kan derimot tolkes slik at norske elever på dette trinnet nå presterer stabilt høyere enn de gjorde i perioden 1995-2007.*» (Bergem et al., 2016, s. 38)

Ikke minst er det gledelig at det har vært en framgang på området tall, selv om framgangen nå ser ut til å ha stoppet opp. På barnetrinnet er det området tall og tallregning som utgjør den viktigste basisen for videre læring i faget. Det er også positivt at PISA har dokumentert en klar framgang i lesing hos norske elever i det siste året i ungdomsskolen (Kjærnsli & Jensen, 2016).

Etter mye innsats fra lærere, skoleledere, politikere og andre har man greid å endre det svake resultatet i matematikk som vi så hos norske elever på barnetrinnet i 1995 til et mer positivt resultat i 2015. Dette kan være en inspirasjon til å se nærmere på hva vi må rette på for at elevene skal få bedre matematikkunnskaper også på andre områder og på høyere nivåer i skolen, for eksempel ungdomstrinnet.

De to områdene som man har satset mest på i norsk skole etter tusenårsskiftet, er lesing på ungdomstrinnet, og matematikk på småskoletrinnet. Det er oppmuntrende at vi har framgang der det satses systematisk over tid. En like systematisk satsing på algebra i den norske skolen er det rimelig vil kunne løse de problemene vi ser også her. Det vil måtte ta noe tid, som det også har gjort i matematikk på småskoletrinnet, og i lesing i PISA. Det som er vanskelig både å forstå og å akseptere, er at norske elever fortsatt er så dramatisk svake i algebra etter at gjentatte studier har pekt på dette problemet. Vi kan ikke si noe eksakt om hvilken betydning elevenes basis i algebra fra grunnskolen har for elevenes prestasjoner i slutten av videregående skole. Men konsistensen i resultater for Norge gir oss en sterk indikasjon. På TIMSS 8./9. trinn har Norge i algebra det største negative avviket fra generelt prestasjonsnivå i verden, og vi ser den samme tendensen i videregående skole.

Det er også tankevekkende at det i 2015 ble det målt *en signifikant tilbakegang i algebra* på 8. trinn fra studien i 2011, på tross av en generell forbedring i norske elevers matematikkprestasjoner. Det ble målt bedre resultater i både tall, geometri og statistikk (signifikant bedre i tall og geometri, ikke signifikant i statistikk). Som det står i TIMSS-rapporten fra 2015, skårer elevene på 8. trinn i Norge «*svært lavt i Algebra sett i forhold til de andre fagområdene*» (Bergem et al., 2016, s. 41). Dette er spesielt alarmerende når vi tar med at de norske resultatene i algebra var svært svake allerede i 2011:

> «*Resultatet for de norske elevene på området Algebra utmerker seg internasjonalt som spesielt svakt. Av de landene som deltok på 8. trinn i 2011, var det bare typiske utviklingsland, med en helt annen ressurssituasjon enn Norge, som lå på eller i underkant av det norske nivået på dette fagområdet.*» (Grønmo et al., 2012, s. 25)

I neste delkapittel ser vi litt nærmere på hvilket grunnlag i matematikk som de norske elevene har fra barnetrinnet. Det mest grunnleggende området for matematikk på dette nivået er tall og tallregning, som vil være det vi setter søkelyset på.

6.3 Norske elevers prestasjoner på ulike fagområder på barnetrinnet

I TIMSS har det vært en generell framgang for norske elever på 4. og 5. trinn fra 2011 til 2015, en fortsettelse av den positive utviklingen vi har sett fra 2003 i TIMSS-studien.

> *«Norske elever presterer svært bra i matematikk i populasjon 1, og dette er et av de mest positive funnene for Norge i hele TIMSS 2015-studien.»*
> (Bergem et al., 2016, s. 26)

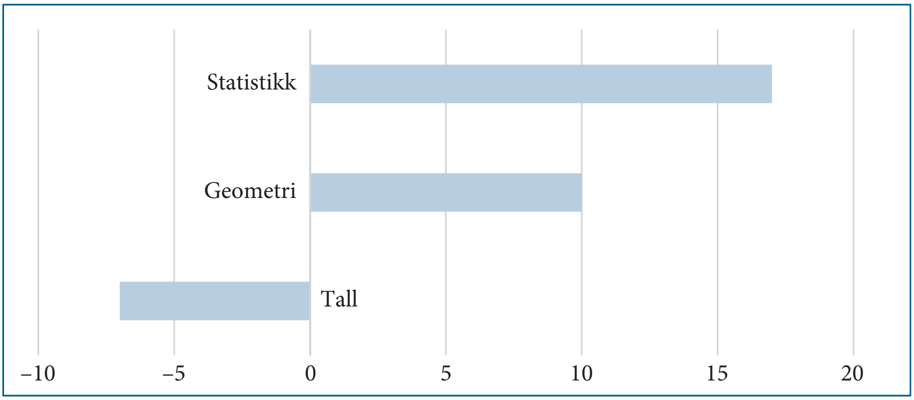
Norge ligger nå helt på topp i Norden når det gjelder prestasjoner sammenliknet med elever som er omtrent jevngamle med de norske elevene. Dette er ubetinget positivt. Norske elever presterer også vel så godt som elevene i England og USA, men her må vi ta med i vurderingen at elevene i disse landene er omtrent et halvt år yngre enn de norske elevene.

Går vi bak tallene for totalskår og ser på skår i fagområder, blir bildet mer problematisk sett med norske øyne. På barnetrinnet tester ikke TIMSS elevene i algebra, men i tall, geometri og statistikk. Det fagområdet i småskolen som har størst betydning for elevenes videre læring av matematikk, og spesielt for læring av algebra, er tall og tallregning.

Figur 6.6 viser hvordan norske elever presterer på barnetrinnet i TIMSS 2015 innen de tre fagområdene de testes i, relativt i forhold til Norges generelle prestasjonsnivå.

Som vi ser av figur 6.6, er det også her statistikk som utmerker seg med gode relative prestasjoner i Norge, mens tall utmerker seg med de relativt svakeste prestasjonene. Vi får derfor et konsistent bilde, på alle nivåene i TIMSS og TIMSS Advanced. Det legges relativt lite vekt på tall og tallregning på barnetrinnet, relativt lite vekt på algebra på mellom- og ungdomstrinn, og stor vekt på fagområdet statistikk tvers igjennom hele grunnskolen i Norge.

Figur 6.6 Avvik mellom Norges skår i de tre fagområdene statistikk, geometri og tall og Norges generelle skår, TIMSS 2015 matematikk 5. trinn.



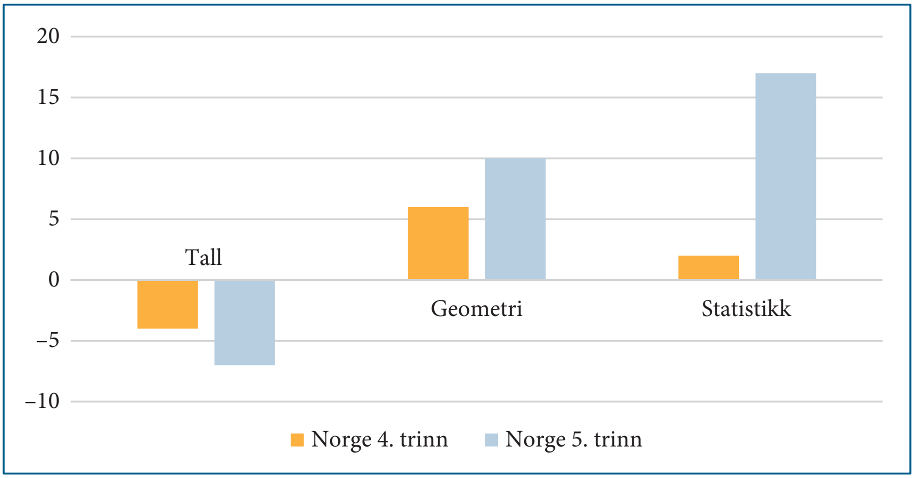
På ungdomstrinnet kom tall kom ut som et område med relativt stor vekt. Dette samsvarer med konklusjoner fra tidligere TIMSS-studier:

> *Det ser ut til at det i Norge legges mindre vekt på undervisning i tall på 4. trinn enn i andre land. På 8. trinn legges det i andre land mer vekt på algebra, et område det legges lite vekt på i Norge.*
>
> *Gode kunnskaper i tall er grunnleggende for videre læring av algebra, men basert på resultatene av våre analyser stiller vi spørsmål om hvorvidt det ikke hadde vært bedre å legge mer vekt på tall tidligere for å frigjøre tid til mer læring av algebra senere. Algebra er en form for generalisering av tall og tallregning.»* (Grønmo & Onstad, 2013a, s. 166)

Figur 6.7 viser avvik i skår på de ulike fagområdene fra generell prestasjonsskår for norske elever på 4. og 5. trinn. Det er en positiv utvikling i norske elevers prestasjoner på alle områdene som måles i TIMSS fra 4. trinn til 5. trinn. Imidlertid viser figur 6.7 at avvikene fra totalskår for de ulike fagområdene blir mer markante fra 4. til 5. trinn, i favør av statistikk og i disfavør av tall. Også på barnetrinnet ser det ut til at det som prioriteres mest er å lære elevene elementær statistikk.

Det synes rimelig å stille noen kritiske spørsmål til denne prioriteringen. Den relativt lave prioriteringen av tall på barnetrinnet, og av algebra på mellom- og ungdomstrinnet, med en tilsvarende høy prioritering av statistikk, framstår som problematisk.

Figur 6.7 Avvik i skår på ulike fagområder relativt til generell prestasjonsskår for Norge, 4. og 5. trinn, TIMSS 2015.



Etter den systematiske gjennomgangen i dette kapitlet av hvilke fagområder som norske elever i grunnskolen presterer svakt på, og hvilke områder de presterer godt på, kan det være interessant å se på hva som framstår som områder som vektlegges i norsk lærerutdanning.

6.4 Resultater fra norsk lærerutdanning

Norge deltok i den internasjonale komparative studien TEDS-M i 2008 sammen med 16 andre land (Grønmo & Onstad, 2012). Studien var i regi av IEA, som også står bak TIMSS og TIMSS Advanced-studiene. Det er første gang en slik internasjonal komparativ studie har blitt gjennomført på dette nivået i utdanningssystemet. I den norske rapporten fra studien står det:

> *«Kort oppsummert kan man si at resultatene på en relativt enkel algebra-oppgave for lærerstudenter i alle de norske utdanningsveiene gir grunn til bekymring. De svake resultatene samsvarer så vidt godt med hva vi har sett i tidligere studier, som TIMSS i grunnskolen (Grønmo, 2010; Grønmo et al.,2004; Grønmo & Onstad, 2009; og TIMSS Advanced i videregående skole (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), hvor det i flere bøker har blitt understreket at kunnskaper i algebra synes å være et nedprioritert område i norsk skole. At det samme synes å være tilfelle i lærerutdanningene, gir ytterligere*

> *grunn til bekymring. Frafall fra yrkesutdanninger i Norge har også blitt begrunnet med at elevene mangler grunnleggende kunnskaper i et viktig område som algebra (NOKUT, 2008).*» (Grønmo & Onstad, 2012, s. 150)

> *«Algebra er et viktig område av matematikken, hvor norske lærerstudenter for ungdomstrinn og videregående skole synes å prestere spesielt svakt. Nedtoningen av den formelle matematikken som har vært påpekt i bøker fra tidligere studier og i artikler, synes derfor også å gjelde for norsk lærerutdanning. Algebra er, sammen med aritmetikk, hva vi kan kalle «motoren» i matematikk. Den generelle nedtoningen i Norge av disse områdene, som mange studier har pekt på, gir derfor all grunn til bekymring. Det gjelder for rekruttering til studier i matematikk, men kanskje i ennå større grad for rekruttering til yrker som bruker matematikk som et redskap.*» (Grønmo & Onstad, 2012, s. 173)

Disse sitatene var basert på de resultatene vi hadde fram til begynnelsen av 2012. De siste resultatene fra TIMSS Advanced og TIMSS i 2015 underbygger ytterligere at den store utfordringen i norsk skole er å lære elevene det matematiske språket algebra som mange av dem vil trenge i videre studier og yrker. I TEDS-M var alle norske lærerutdanninger med, enten de utdannet lærere til barnetrinn, ungdomstrinn eller videregående skole.

6.5 Avsluttende kommentarer

Kapittel 4 drøftet ulike begrunnelser for at matematikk er et skolefag, med henvisning til Niss (2003) som pekte på skolens oppgave når det gjelder å ta hensyn til hva elevene vil trenge av kunnskaper på ulike områder som utdanning, yrkesliv, i dagligliv og som samfunnsborgere. De analysene vi har gjort i dette kapitlet peker på to ting det er nødvendig å se grundig på, for eksempel i den pågående revisjonen av norske læreplaner.

Det ene er *prioriteringen* av hva elevene skal lære i matematikk, det gjelder på alle trinn i skolen. Våre analyser framviser konsistente resultater over de siste 20 årene som viser at norsk skole, i større grad enn i noen andre land det er rimelig å sammenlikne oss med, ikke prioriterer progresjon og modningstid innen den sentrale «stolpen» i matematikkfaget bestående av tall og algebra. Uten at vi tar tak i dette, vil det ha store konsekvenser både for den enkelte elev, og for samfunnet som trenger personer med denne type kompetanse i mange yrker og profesjoner. Det er ingen løsning for et rikt land som Norge, som bruker så mye ressurser på utdanning, å ikke greie å gi sin egen befolkning den kunnskapen de trenger.

Det andre som peker seg ut er *progresjonen* i lærestoff, også det gjennom hele skoleløpet. På de laveste trinnene er tall det fagområdet som utmerker seg med svake elevprestasjoner i Norge, mens det får større prioritering på ungdomstrinnet. Allerede i TIMSS-rapporten fra 2011 (Grønmo et al., 2012) ble det pekt på dette, og vist til at ved en bedre progresjon ville man kunne få mer tid på mellomtrinn og ungdomstrinn til å lære elevene algebra. Det ser ut til at det gjøres i mange andre land.

Elevene skal lære den typen matematikk de vil trenge både i dagligliv og i videre utdanninger og yrker. Det holder derfor ikke at vi presterer godt i statistikk, som mange med god grunn hevder elevene vil trenge i sitt daglige liv, fordi statistiske framstillinger brukes mye i media og i offentlige dokumenter. Elevene trenger det for å kunne delta som aktive borgere i samfunnet. Men de trenger også gode kunnskaper i tall og algebra for utdanning og yrker. Skolen i Norge må greie å veie disse hensynene mot hverandre, og legge opp til en god progresjon og prioritering. Det har vi ikke i dag, det mest alarmerende er at vi fortsetter å gå fram i prestasjoner i statistikk, mens tendensen er tilbakegang i prestasjoner i algebra.

Det er også interessant å merke seg at flere land, særlig i Øst-Asia som Hong Kong, Japan og Singapore ser ut til å ha en relativt jevn vekt på områder som statistikk og algebra. Noe av denne tendensen ser vi også i USA. Vi gjør oss derfor til talspersoner, ikke for å ta bort statistikk, men for å lære av de landene som ser ut til å ha funnet en bedre balanse mellom hva de prioriterer av faglig stoff. Det betyr ikke at vi skal kopiere noe land; slike enkle løsninger har vi ingen tro på. Men vi har tro på å se til ulike land med sikte på å få et bredest mulig grunnlag for beslutninger om hvordan vi kan bedre matematikkundervisningen i vårt land.

KAPITTEL 7

Norsk skole og elever med talent eller spesiell interesse for matematikk

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO

Ifølge opplæringsloven og læreplanverket for norsk skole har alle elever krav på opplæring tilpasset deres evner og forutsetninger. Det gjelder både elever med særlige vansker og elever med særlige evner og anlegg i ulike fag og på ulike områder. I dette kapitlet analyserer vi noen resultater fra TIMSS Advanced og TIMSS med sikte på å kunne si noe om hvor godt den norske skolen ser ut til å ta vare på elever med talent eller spesiell interesse for matematikk. En spesiell interesse kan enten være basert på en genuin faglig interesse, eller på en interesse som bunner i at elevene ser at de trenger matematikk for videre utdanninger og yrker. Fordelingene av elever på de ulike kompetansenivåene kan gi oss indikasjoner på hvor godt skolen tar vare på ulike typer elever, både de som sliter og de som har spesiell interesse for faget.

Vi sammenlikner situasjonen i Norge med land vi finner det relevant å sammenlikne med. Vi ser også litt på noen utviklingstrekk i Norge når det gjelder å ta vare på elever med talent eller spesiell interesse for matematikk. Vi har valgt å variere mellom hvilke betegnelser vi bruker om disse elevene som for eksempel elever med talent for matematikk, evnerike elever, begavede elever og elever med stort læringspotensial. Hvilke betegnelser som brukes varierer i den litteraturen vi henviser til.

7.1 Innledning

At faglig sterke elever også har krav på tilpasset opplæring ut i fra deres behov har hatt lite gjennomslag i norsk skole, på tross av at dette er nedfelt i læreplaner og lovverk. Læreren tenderer heller mot å rette undervisningen til gjennomsnittet i klassen (Nadjafikhab, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). På denne måten ender de flinke elevene med å klare seg selv:

> *For å oppsummere her kan vi konkludere med at norsk skole grovt sett, og med en del unntak, preges av to stereotype oppfatninger, nemlig at*
>
> - *de spesielt begavede klarer seg selv, og skolen behøver ikke å bry seg så mye*
> - *tilpasset opplæring for evnerike elever dreier seg om elitisme, og det må vi passe oss for*
>
> *Videre har lærere og skolefolk flest mangelfulle kunnskaper og for liten kompetanse når det gjelder evnerike elever.* (Skogen, 2014a, s. 47)

For å få et inntrykk av hvor godt norsk skole tar vare på evnerike elever presenterer vi i dette kapitlet data fra TIMSS Advanced og TIMSS som viser hvordan elevenes prestasjoner forholder seg til de kognitive kompetansenivåene som er definert i studiene. På den måten får vi informasjon om hvilket kognitivt nivå elevene befinner seg på i studiene. Beskrivelse av de ulike kompetansenivåene i TIMSS Advanced og TIMSS gis under de senere delkapitlene, som presenterer resultatene først for elever med full fordypning i matematikk på videregående skole, deretter for elever på ungdomstrinnet og til sist elever på barnetrinnet.

I TIMSS Advanced i neste delkapittel baserer vi analysene på prosentandel av elevene som har valgt R2 i videregående skole som *når opp til* de tre kognitive nivåene i studien. Hvor mange prosent av elevene som når de ulike kompetansenivåene gir indikasjoner på hvilke muligheter skolen gir elevene til å prestere godt i matematikk. Mange elever på høye kompetansenivåer tolker vi som en indikator på at skolen tar godt vare på elever med spesiell interesse eller talent for matematikk. Mange elever som presterer lavt i forhold til de kognitive kompetansenivåene tolker vi som at skolen ikke er så flink til å ta vare på talentfulle elever.

I TIMSS på ungdomstrinnet og barnetrinnet baserer vi analysene på hvordan elevene *fordeler seg* på de fire kompetansenivåene som er definert i studien, og på hvor mange prosent av elevene som faller under de definerte kompetansenivåene. Selv om vi har et fokus på hvor godt skolen tar vare på elever med interesse eller talent for matematikk, er det viktig i grunnskolen også å reflektere rundt hvor godt skolen tar vare på elever i den andre enden av skalaen, de som sliter faglig. Mange elever på det laveste nivået tolker vi som en indikasjon på at skolen i liten grad lykkes i å ta godt vare på elever som sliter med å tilegne seg matematisk kunnskap, mens mange elever på de høyeste nivåene gir oss indikasjoner på at skolen fungerer godt for de talentfulle elevene. Skolen har ansvar for å ivareta alle typer elever og gi dem tilpasset opplæring.

Hensikten med dette kapitlet er å bidra til mer debatt om begavede elevers situasjon i norsk skole. Matematisk kompetanse er ansett som en viktig del av begavelse (Niss, Bruder, Planas, Turner & Villa-Ochoa, 2016). Elever med matematisk talent beskrives ofte som kreative, faglig nysgjerrige, kan visualisere og forestille seg matematiske modeller, har høye kognitive evner og kan under gode forutsetninger prestere langt over sitt aldersbestemte trinn i matematikk (Leikin, Leikin, Paz-Baruch, Waisman & Lev, 2017). På denne måten er matematisk begavelse ansett som et dynamisk karaktertrekk hvor miljø og faglig stimulering er helt avgjørende for at disse elevene skal få utløp for sitt potensial (Smedsrud & Skogen, 2016).

I boka «Matematikktalenter i skolen – hva med dem» (Grønmo, Jahr, Skogen & Wistedt, 2014) drøftes begavede elevers situasjon i norsk og svensk skole fra mange ulike synvinkler. Skogen (2014a) tar opp forholdet mellom intelligens og prestasjoner i en vid kontekst, og drøfter dette med spesiell vekt på talentfulle elever. Matematikkfaget og dets plass i skole og samfunn og krav det stiller til undervisningen i matematikk drøftes med vekt på forutsetninger for gode faglige prestasjoner (Jahr, 2014). Den svenske skoleforskeren Wistedt (2014) tar for seg situasjonen i svensk skole, men med henvisninger til norsk skole. På området begavede elever, som på mange andre områder, er det mange likhetstrekk mellom Norge og Sverige. Bokas siste kapittel tar opp og diskuterer hvordan lærere og skoleledere kan bidra til at undervisningen av begavede elever forbedres (Skogen, 2014b).

Situasjonen for spesielt begavede elever har blitt diskutert en del det siste tiåret:

> *Det er viktig at lærere legger til rette for elever med stort læringspotensial. Hvis enkelte elever som har spesielle evner og talent innenfor et fag ikke får den oppfølgingen de trenger, kan de bli lei, umotiverte eller utvikle negativ adferd.* (Idsøe, 2015)

Jøsundalutvalget ble nedsatt for å se på opplæringen for elever med stort læringspotensial. I utredningen (NOU, 2016) kommer utvalget med en rekke tiltak for å gi disse elevene et bedre skoletilbud. Det er positivt at ansvaret for å gi tilpasset opplæring også til denne elevgruppen tydelig er satt på dagsorden og drøftes hos skolemyndighetene. Med de forskningsresultatene vi presenterer i dette kapitlet vil vi gi faktabasert kunnskap som innspill i debatten. Resultater av analyser fra internasjonale komparative studier gir oss informasjon både om utviklingen over tid i eget land, og om situasjonen i andre land som vi kan sammenlikne med. Det er viktig at debatten om talentfulle elever baserer seg mest mulig på faktakunnskap, og ikke på mer eller mindre ideologiske synspunkter.

7.2 Elever på kognitive kompetansenivåer i slutten av videregående skole

TIMSS Advanced har utviklet et system med tre kognitive kompetansenivåer – avansert, høyt og middels – som beskriver hvor langt opp på skalaen elevenes prestasjoner er, og hvilken type kompetanse elever på et visst nivå har, se tekstboks 7.1.

Tekstboks 7.1 *Beskrivelser av de tre kompetansenivåene i matematikk, TIMSS Advanced*

Avansert kompetansenivå
(625 poeng i TIMSS Advanced måleskala)
Elevene demonstrerer en klar og tydelig forståelse av begreper, av bruk av prosedyrer, og i å anvende matematisk resonnering. De kan løse problemer i komplekse kontekster i algebra, kalkulus, geometri og trigonometri.

Høyt kompetansenivå
(550 poeng i TIMSS Advanced måleskala)
Elevene kan anvende et bredt utvalg av matematiske begreper og ferdigheter i algebra, kalkulus, geometri og trigonometri til å analysere og løse problemer i flere trinn både i rutine- og ikke-rutine-kontekster.

Middels kompetansenivå
(475 poeng i TIMSS Advanced måleskala)
Elevene demonstrerer at de har de grunnleggende kunnskapene om begreper og ferdigheter i algebra, kalkulus og geometri som de trenger for å løse rutineproblemer.

(Bergem et al., 2016)

Desto mer interesse og talent for matematikk elevene har, jo mer sannsynlig er det at de kan nå et høyere kognitivt kompetansenivå. Elever som sliter med å lære matematikk vil i større grad prestere på et lavere kognitivt nivå. I den første rapporten fra TIMSS Advanced 2015 sto det at:

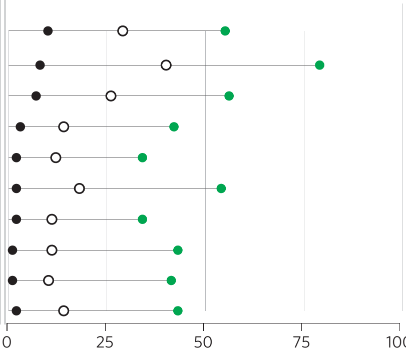
> *«Når vi skal vurdere disse resultatene, er det, på samme måte som når vi vurderer gjennomsnittprestasjoner i et land, nødvendig å ta med i betraktningen hvor mange prosent av et årskull som har valgt matematikk på dette nivået, det vi kaller dekningsgrad.»* (Grønmo, Hole & Onstad, 2016, s. 40)

Tekstboks 7.2 *Beregning av prosent av årskull*

Beregningene gjøres ved å multiplisere prosent av elevene med fordypning i matematikk som *når* et bestemt kompetansenivå med landets *dekningsgrad*, det vil si prosent av årskullet i landet som har fordypning i matematikk. Man får da et tall som representerer *prosent av årskullet* i landet som når det aktuelle kompetansenivået.

I denne boka har vi tatt hensyn til dette ved å beregne for alle landene som deltok i TIMSS Advanced, hvor *stor andel av årskullet i landet* som når opp til de ulike kognitive kompetansenivåene, se tekstboks 7.2. Tabell 7.1 gir bakgrunnsdata for disse beregningene.

Tabell 7.1 Prosentandel elever som når de ulike kompetansenivåene i matematikk, TIMSS Advanced 2015.



Land	Avansert kompetansenivå (625)	Høyt kompetansenivå (550)	Middels kompetansenivå (475)	Dekningsgrad matematikk
Russland	10 (1,1)	29 (1,9)	55 (2,3)	10,1 %
Libanon	8 (1,0)	40 (2,7)	79 (1,8)	3,9 %
USA	7 (1,2)	26 (1,6)	56 (2,5)	11,4 %
Slovenia	3 (0,5)	14 (1,2)	42 (1,7)	34,4 %
Italia	2 (0,5)	12 (1,0)	34 (1,7)	24,5 %
Portugal	2 (0,5)	18 (1,1)	54 (1,7)	28,5 %
Sverige	2 (0,3)	11 (0,8)	34 (1,6)	14,1 %
Frankrike	1 (0,3)	11 (1,0)	43 (1,7)	21,5 %
Norge	1 (0,3)	10 (1,4)	41 (2,9)	10,6 %
Internasjonal median	2	14	43	

KILDE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study - TIMSS Advanced 2015

Tabell 7.2 viser *både* prosent av elever med full fordypning i matematikk som når et nivå, og den beregnede prosenten for årskullet i landet som når dette kompetansenivået. Det er selvsagt mulig at noen elever som ikke har valgt fordypningkurset siste året i videregående skole når et kompetansenivå uten å ha dette kurset, men vi antar at det vil være en svært liten gruppe sammenliknet med de som tar kurset. Beregningene vi har gjort gir oss derfor gode indikatorer på hvor mange «eksperter» i matematikk landet utdanner gjennom skoleløpet. Gjennomsnittsalderen til elevene i TIMSS Advanced varierer en del. Også dette har betydning for vurderingen av landenes utdanningssystem, uten at vi har gjort noen beregninger for dette. Vi nevner det som en faktor som man også kan ta med i betraktningen av skolesystemets kvalitet.

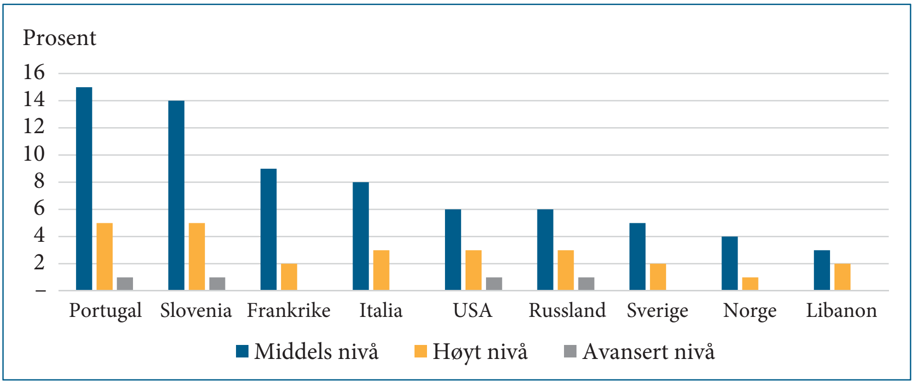
For mer utdypende forklaring på innholdet i disse kognitive kompetansenivåene i TIMSS Advanced henviser vi til den internasjonale rapporten (https://timssandpirls.bc.edu/).

Hvis et land har en større andel i et årskull som når de høyeste kognitive kompetansenivåene i TIMSS Advanced enn et annet land, tolker vi det som landet har et skolesystem som i større grad lykkes i å ta godt vare på de i befolkningen som har talent eller spesiell interesse for matematikk. Hvis en liten andel av årskullet ved slutten av videregående skole når opp til de høyeste nivåene, tar vi som en indikasjon på at landets skolesystem i mindre grad greier å ta vare på sine talentfulle elever i matematikk.

Tabell 7.2 Andel av elever som har valgt full fordypning i matematikk siste året på videregående skole (Advanced elever) som når de ulike kognitive kompetansenivåene og andel elever av landets årskull som når de ulike kompetansenivåene i TIMSS Advanced.

	Middels nivå		Høyt nivå		Avansert nivå	
	prosent av Advanced elever	prosent av årskullet i landet	prosent av Advanced elever	prosent av årskullet i landet	prosent av Advanced elever	prosent av årskullet i landet
Portugal	54	15	18	5	2	1
Slovenia	42	14	14	5	3	1
Frankrike	43	9	11	2	1	0
Italia	34	8	12	3	2	0
USA	56	6	26	3	7	1
Russland	55	6	29	3	10	1
Sverige	34	5	11	2	2	0
Norge	41	4	10	1	1	0
Libanon	79	3	40	2	8	0

Figur 7.1 Prosent av landets *årskull* som når de ulike kognitive kompetansenivåene



Tabell 7.2 og figur 7.1 viser resultatene av disse beregningene. Dette gir oss data for hvor mange prosent av *et årskull* i de ulike landene som når opp til de ulike kompetansenivåene slik de er definert i TIMSS Advanced.

Som det framgår av tabell 7.2 og figur 7.1, ligger Norge sammen med Sverige og Libanon på bunnen når det gjelder hvor stor andel av årskullet som når middels kognitivt kompetansenivå i TIMSS Advanced 2015. Når det gjelder andelen som når høyt kompetansenivå, ligger Norge lavest av alle land som deltar i studien.

Elever på middels nivå i TIMSS Advanced har, slik dette kompetansenivået er definert i studien, demonstrert at de har de grunnleggende kunnskapene om begreper og ferdigheter i algebra, kalkulus og geometri som de vil trenge for å løse rutineoppgaver. Dette er et nivå som mange elever vil trenge for videre utdanninger og yrker hvor man anvender matematikk, det man kan kalle en grunnleggende faglig basis. At en så liten prosentandel som 4,3 % av årskullet når dette nivået i Norge, gir grunn til bekymring. Land som Portugal og Slovenia har 14–15 % på dette nivået, mens andelen i Frankrike og Italia ligger rundt 8–9 % av årskullet. Også USA, Russland og Sverige har flere som når middels nivå enn Norge.

De elevene som når høyt kognitivt kompetansenivå kan, i motsetning til de som bare når middels kompetansenivå, anvende sin kunnskap i algebra, kalkulus, geometri og trigonometri til å analysere og løse problemer også i flere trinn, og i kontekster som ikke er rutinepreget. I Norge er det bare vel 1 % av årskullet som når dette nivået. Det er lavest av alle land i TIMSS Advanced. Avansert kompetansenivå i TIMSS Advanced er i høyeste grad det vi kan kalle «eksperter» i faget, de demonstrerer en tydelig dybdeforståelse i matematikk som setter dem i stand til å løse komplekse problemer i både algebra, kalkulus, geometri og trigonometri. I Norge, som i flere av de andre landene, er det ingen målbar prosentandel som når dette nivået.

Elever på et høyere kompetansenivå i TIMSS Advanced har den kunnskapen som beskrives i de lavere nivåene, i tillegg har de kunnskap utover dette. Ofte går det på en dypere matematisk forståelse og en evne til å løse mer sammensatte og komplekse problemer. Andelen elever som *når opp til* høyt nivå, det vil si elever som enten er på høyt eller avansert nivå, er i mange land rundt 3,5 til nærmere 6 prosent av årskullet. For Norge og Sverige er det ikke tilfellet, med 2 % av årskullet i Sverige og med 1 % av årskullet i Norge. Dette resultatet understøtter det som den svenske skoleforskeren Wistedt (2014) har pekt på, at på tross av at skolen i begge land er forpliktet av sine skolelover til å gi alle barn muligheter til å utvikles i samsvar med deres evner og anlegg, så ser man tegn på at særlig talentfulle elever ikke får den undervisningen de har krav på.

Bildet vi får i slutten av videregående skole når det gjelder hvor stor andel av et norsk årskull som når opp til de definerte kognitive kompetansenivåene i TIMSS Advanced gir grunn til bekymring. Norge er det landet som har lavest prosentandel av årskullet som når høyt kompetansenivå. Når det gjelder andelen av et årskull elever på det lavest definerte kompetansenivået, middels nivå, er det bare Libanon som ligger lavere. For mer diskusjon av de resultatene vi har presentert her, henviser vi til delkapittel 7.5.

Hva elevene har lært eller ikke lært av matematikk på lavere nivå i skolen vil ha betydning for hva elevene lærer i videregående skole. Særlig i et hierarkisk fag som matematikk, er det viktig å ta inn dette perspektivet. I neste delkapittel vil vi se nærmere på *fordelingen av* elever på kompetansenivåer i matematikk på 8. trinn og 9. trinn, for å få et inntrykk av fordelingen av norske elever på de høyere kognitive nivåene på disse trinnene i skolen. Det sier noe om hvilket grunnlag for videre læring i matematikk som har blitt lagt i grunnskolen.

7.3 Elever på kognitive kompetansenivåer på ungdomstrinnet

På samme måte som i TIMSS Advanced, har man i TIMSS utviklet et system med kognitive kompetansenivåer som beskriver hvilken type kompetanse elever med et visst antall poeng har; se tekstboks 7.3 for beskrivelse av de enkelte nivåene for TIMSS på ungdomstrinnet. Desto mer interesse og talent for matematikk elevene har, jo mer sannsynlig er det at de kan nå et høyere kognitivt kompetansenivå. Elever som sliter med å lære matematikk vil i større grad prestere på et lavere kognitivt nivå. Hvis et land har mange elever på de høyeste nivåene, indikerer det at landet gir talentfulle elever gode muligheter til å tilegne seg kunnskaper i matematikk. Få elever på de høyeste nivåene tyder på det motsatte. Stor spredning mellom elevene, med relativt mange på høyt nivå og relativt mange på lavt nivå kan bety at man ikke lykkes med å ivareta alle elever på en god måte. I dette kapitlet, hvor hovedvekten ligger på å studere situasjonen for talentfulle elever, vil vi legge mest fokus på fordelingen av elever på de høyeste kompetansenivåene.

Som det framgår av tekstboks 7.3, er det i TIMSS-studien i grunnskolen definert fire kognitive kompetansenivåer, avansert nivå, høyt nivå, middels nivå og lavt nivå. Dette i motsetning til TIMSS Advanced-studien som bare har tre nivåer, man har ikke definert noe lavt kompetansenivå for elever som har valgt full fordypning i matematikk i videregående skole. Noen elever vi prestere under det lavest definerte nivået i TIMSS; det har vi valgt å kalle under lavt nivå.

Tekstboks 7.3 *Kort karakteristikk av de ulike kompetansenivåene i matematikk i TIMSS 2015, 8.(9.) trinn*

Avansert nivå (625 poeng og over)
Elevene kan, konfrontert med ulike typer problemer, anvende matematikk og resonnere matematisk. De kan løse førstegradslikninger og uttrykke generaliseringer.

Høyt nivå (550–624 poeng)
Elevene kan bruke sin kunnskap og forståelse i ulike og relativt komplekse situasjoner.

Middels nivå (475–549 poeng)
Elevene kan bruke grunnleggende matematiske kunnskaper i mange slags situasjoner.

Lavt nivå (400–474 poeng)
Elevene har noe kunnskap om hele tall og enkle grafer.

(Bergem et al., 2016)

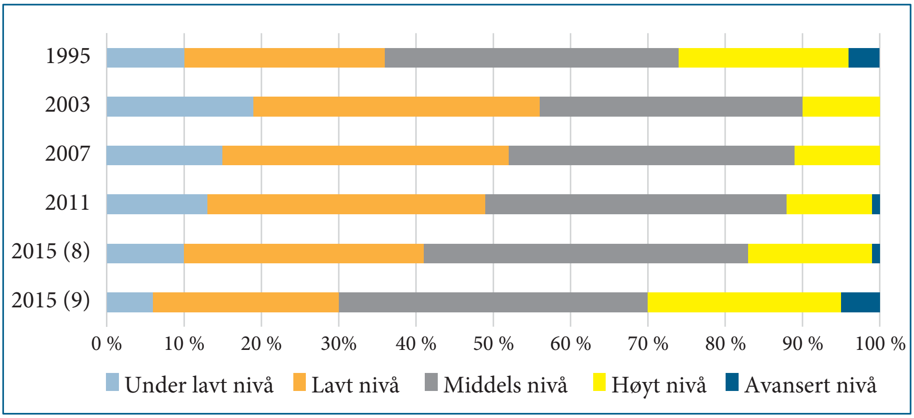
Det som spesielt kjennetegner elevene som når opp til det høyeste nivået i TIMSS på ungdomstrinnet er at de kan resonnere matematisk, løse førstegradslikninger og utrykke generaliseringer. Dette er den typen matematisk kunnskap som man i hovedsak vil forbinde med fagområdet algebra på dette trinnet i skolen. Elevenes kunnskaper i algebra på ungdomstrinnet vil være det som legger grunnlaget for videre læring i videregående skole, spesielt i 1T og i programfagene R1 og R2. Når vi i dette kapitlet legger vekten på hvordan skolen tilrettelegger undervisningen for de mest talentfulle elevene, er det særlig interessant å se hvor mange prosent av de norske elevene som når dette nivået. Definisjonen av de andre kompetansenivåene skiller seg hovedsakelig når det gjelder hvor komplekse oppgaver elevene greier å løse ved hjelp av matematikk.

Tabell 7.3 og figur 7.2 viser fordelingen av norske elever på de kognitive kompetansenivåer i alle TIMSS-studiene på ungdomstrinnet fra 1995 til 2015. For 2015 har vi lagt inn tallene for både 8. trinn, som er det nivået vi har trenddata for, og 9. trinn som er det trinnet som Norge nå definerer som sin hovedpopulasjon. For mer om dette, se (Bergem et al., 2016).

Tabell 7.3 Fordeling av norske elever på kompetansenivåer på ungdomstrinnet fra 1995 til 2015. Elevene på 8. trinn i tabellen har samme alder som elevene i de foregående årene, elevene på 9. trinn er ett år eldre og har ett år mer skolegang.

	Under lavt nivå	Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå	Avansert nivå
1995	10	26	38	22	4
2003	19	37	34	10	0
2007	15	37	37	11	0
2011	13	36	39	11	1
2015 (8)	10	31	42	16	1
2015 (9)	6	24	40	25	5

Figur 7.2 Fordeling av norske elever på kompetansenivåer på ungdomstrinnet fra 1995 til 2015 i TIMSS, Norge



Fordelingen på de kognitive kompetansenivåene er selvsagt relatert til landets generelle prestasjonsnivå. Generelt høyere middels prestasjonsnivå henger vanligvis sammen med en større andel elever på de høyere nivåene, og en lavere andel elever på de laveste nivåene. Men land med likt gjennomsnitt for prestasjoner kan likevel være ulike i hvordan fordelingen er mellom de ulike kompetansenivåene (Bergem et al., 2016). Det er derfor interessant å sammenligne kompetansenivåer mellom land, og å se på hvor man har sett endring over tid i Norge.

På tross av framgang for norske elever etter den markante nedgangen fra 1995 til 2003 (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turmo, 2004), er norske elevers prestasjoner på ungdomstrinnet ennå ikke tilbake på det nivået like gamle elever var på i 1995 (Bergem et al., 2016).

Vi ser av tabell 7.3 og figur 7.2 at når det gjelder elever på de to høyeste nivåene, høyt og avansert kompetansenivå, så er det 9. trinn i 2015 som likner mest på fordelingen på 8. trinn fra 1995. Vi må da huske på at elevene som vi testet i 1995 var ett år yngre, og hadde ett år mindre skolegang, enn elevene på 9. trinn i 2015. I 1995 var det 4 % av elevene på 8. trinn som nådde opp til avansert nivå, mens det i 2003 og 2007 ikke var noen målbar andel av norske elever som nådde dette nivået. I 2011 og 2015 nådde 1 % av norske 8. klassinger opp til avansert nivå. I 2015 er det 5 % av elevene med ett år mer skolegang og ett år eldre som når avansert nivå i TIMSS-studien, mot 4 % av de elevene som var ett år yngre og hadde ett år mindre skolegang som nådde dette i 1995. På høyt kompetansenivå ser vi det samme mønsteret. De to fordelingene på dette kompetansenivået som er mest like, er 8. klasse fra 1995 med 9. klasse i 2015. I 1995 nådde 22 % av norske 8. klassinger høyt nivå, mens det var 25 % av 9. klassingene som nådde dette nivået i 2015. I årene mellom var andelen lavere.

Det er lite i dataene fra TIMSS på ungdomstrinnet som tyder på at norsk grunnskole er flink til å ta vare på de elevene som har en spesiell interesse eller talent for matematikk. Basert på de siste tallene fra 2015-studien ligger våre 9. klassinger, som er ett år eldre og har ett år mer på skolen enn de vi testet i 1995, bare marginalt over ett år yngre elever med ett år mindre skolegang fra 1995.

I den andre enden av skalaen er resultatene noe mer oppløftende. Det er nå 10 % av norske elever på 8. trinn som ligger under lavt nivå, den samme prosenten som jevngamle elever gjorde i 1995. På 9. trinn er det bare 6 % som ligger under lavt nivå. Dette kan være en indikasjon på at norsk skole de siste tiårene har vært bedre til å ivareta de elever som sliter faglig, enn elever med interesse eller talent for matematikk.

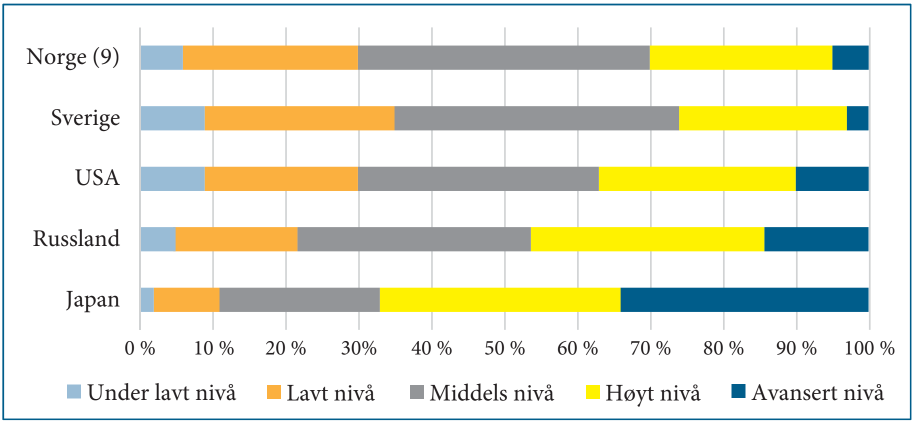
Det er alltid interessant hvilke land man skal velge å sammenlikne med i rapporter og artikler. Skal man bare velge å sammenlikne med land som vi har mye til felles med, kulturelt og på andre måter, eller skal man gjøre en bredere internasjonal sammenlikning. Tidligere analyser av data fra internasjonale komparative studier som TIMSS, TIMSS Advanced, PISA og TEDS-M (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013; Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Grønmo & Olsen, 2006; Olsen & Grønmo, 2006) har vist at man finner fire ulike profiler, profiler som er stabile over tid, på ulike nivåer i skolen og i ulike studier med forskjellige rammeverk for hvilken type matematisk kompetanse de tester elevene i. Vi kan snakke om en nordisk profil, en engelskspråklig profil, en østeuropeisk profil og en østasiatisk profil. Analysen i kapittel 5 bekrefter disse funnene. I flere tidligere TIMSS- og TIMSS Advanced-rapporter har man valgt land fra ulike profiler, for å få et bredere sammenlikningsresultat for å trekke konklusjoner.

Vi har derfor i dette kapitlet valgt å sammenlikne med følgende land som deltok i TIMSS Advanced: Russland (østeuropeisk), USA (engelskspråklig) og Sverige (nordisk). I tillegg tar vi med Japan fordi vi ønsker å sammenlikne med et østasiatisk land som ikke ligger alt for langt unna oss i generelt prestasjonsnivå. Mange av de andre østasiatiske landene presterer bedre enn Japan på både ungdomstrinnet og barnetrinnet. Vi har her bare lagt inn 9. trinn for Norge, som fra 2015 er definert som hovedpopulasjon (se Bergem et al. (2016) for mer om skifte av hovedpopulasjon i Norge). På den måten sammenlikner vi de norske resultatene med land som ikke er for langt unna de norske elevene i alder.

Tabell 7.4 Fordeling av elever i noen land på kompetansenivåer på ungdomstrinnet, TIMSS 2015. Elevenes gjennomsnittsalder er angitt.

	Alder	Under lavt	Lavt	Middels	Høyt	Avansert
Norge (9)	14,7	6	24	40	25	5
Sverige	14,7	9	26	39	23	3
USA	14,1	9	21	33	27	10
Russland	14,7	5	17	32	32	14
Japan	14,5	2	9	22	33	34

Figur 7.3 Fordeling av elever i noen land på kompetansenivåer på ungdomstrinnet, TIMSS 2015.



De norske og russiske elevene er like gamle og eldst blant dem vi velger å sammenlikne med. Norge skiller seg her klart ut med å ha en mindre andel elever på avansert og høyt kompetansenivå enn de andre landene vi ser på. Samtidig gjør vi det ikke bedre enn de andre landene når det gjelder å trekke med svake elever, heller det motsatte; vi har vel så mange elever på lavt og under lavt nivå som de andre landene bortsett fra Sverige.

Det ser ikke ut som om det er noen motsetning mellom å gi elever med talent og interesse for matematikk de utfordringene de trenger for å prestere godt, og det å trekke med seg de elevene som sliter med å lære faget. Dette kan tyde på at om Norge legger mer vekt på også å gi mer faglige utfordringer til sine matematikktalenter i skolen, så behøver ikke det å gå ut over de svakere elevene.

7.4 Elever på kognitive kompetansenivåer på barnetrinnet

I dette delkapitlet presenterer vi resultater fra TIMSS på barnetrinnet for å vise utviklingen i fordeling på kognitive kompetansenivåer i Norge fra 1995 til 2015. Beskrivelsene av kompetansenivåene i TIMSS på barnetrinnet er gjengitt i tekstboks 7.4.

Tekstboks 7.4 *Kort karakteristikk av de ulike kompetansenivåene i matematikk i TIMSS 2015, 4.(5.) trinn*

Avansert nivå (625 poeng og over)
Elevene kan bruke sin kunnskap og forståelse i mange slags nokså komplekse situasjoner og forklare sine resonnementer.

Høyt nivå (550–624 poeng)
Elevene kan bruke sin kunnskap og forståelse til å løse oppgaver.

Middels nivå (475–549 poeng)
Elevene kan bruke grunnleggende matematiske kunnskaper i enkle situasjoner.

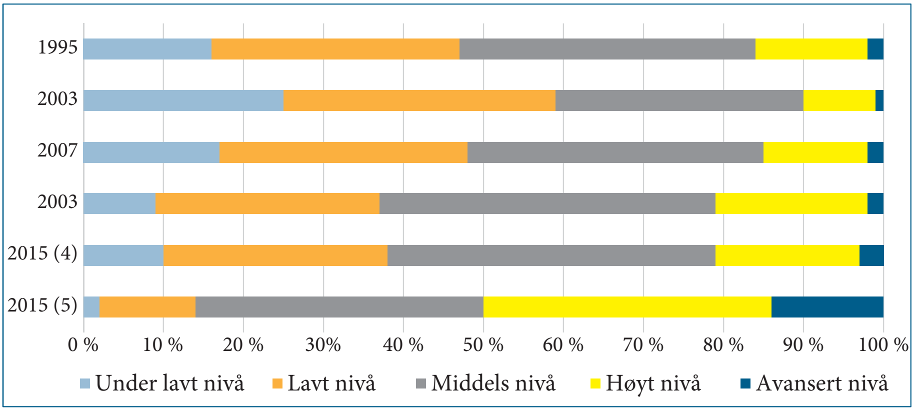
Lavt nivå (400–474 poeng)
Elevene har noe grunnleggende matematisk kunnskap.

(Bergem et al., 2016)

Tabell 7.5 Fordeling av norske elever på kompetansenivåer på barnetrinnet fra 1995 til 2015

	Under lavt	Lavt	Middels	Høyt	Avansert
1995	16	31	37	14	2
2003	25	34	31	9	1
2007	17	31	37	13	2
2011	9	28	42	19	2
2015 (4)	10	28	41	18	3
2015 (5)	2	12	36	36	14

Figur 7.4 Fordeling av norske elever på kompetansenivåer på barnetrinnet fra 1995 til 2015



TIMSS-studien viser at våre elever på 4. trinn i 2015 presterer bedre enn det jevngamle elever gjorde i 1995. Etter en markant tilbakegang fra 1995 til 2003, har det vært en jevn framgang i de to neste studiene i 2007 og 2011, men framgangen ser nå ut til å ha stoppet opp:

> *Fra og med 2003 har det imidlertid vært en fin stigning i prestasjonsnivået for de norske elevene på dette trinnet. Denne framgangen har imidlertid ikke fortsatt i den siste fireårsperioden. Gjennomsnittet for Norge (4) har gått fra 495 til 493 poeng. Dette er ikke en signifikant endring i skår, men kan derimot tolkes slik at norske elever på dette trinnet nå presterer stabilt høyere enn de gjorde i perioden 1995-2007.* (Bergem et al., 2016, s. 38)

At framgangen har stoppet opp ser man også på 5. trinn; også her var resultatet det samme i 2011 og 2015. TIMSS-rapporten fra 2011 framhevet det positive i framgangen etter 2003, samtidig som den påpekte at de norske resultatene fortsatt var svake i et internasjonalt perspektiv:

> *Konklusjonen blir at selv med en tydelig positiv tendens i utviklingen av de norske prestasjonene på 4. trinn, er prestasjonene fortsatt svake sett i et internasjonalt perspektiv. Det er fortsatt et stort rom for forbedring av elevenes kunnskaper i matematikk på 4. trinn; det er viktig at den positive utviklingen ikke stopper opp.* (Grønmo et al., 2012, s. 20)

Ser vi på utviklingen av fordelingen på kompetansenivåene høyt og avansert, er det en litt større andel på disse nivåene enn for jevngamle elever i 1995. I den andre delen av skalaen er andelen elever på lavt og under lavt nivå mindre. Disse resultatene kan tyde på at man på dette trinnet i skolen nå tar noe bedre vare på både de talentfulle elevene og på de elevene som sliter faglig. Men endringene er små, så vi må være forsiktige med å trekke for bastante konklusjoner.

Den store forskjellen vi ser når det gjelder fordelingen på kognitive kompetanseområder er fra 4. trinn til 5. trinn i 2015. Dette kan tyde på en positiv utvikling i skolens matematikkundervisning i overgangen fra 4. trinn til 5. trinn. Det ser også ut som at denne positive endringen gjelder elever i begge ender av fordelingen, med en klar nedgang på andelen elever på og under lavt nivå, og med en tilsvarende stor framgang når det gjelder andelen elever på høyt og avansert nivå. Utviklingen i gjennomsnittskår fra 4. trinn til 5. trinn i TIMSS 2015 gikk fra 493 til 549, en forskjell på 56 poeng. Man snakker ofte om at økningen fra ett år til det neste, ett år eldre elever og ett år mer skolegang, vil ligge rundt 35–40 poeng. Det understøtter vår konklusjon om at det ser ut å skje en klar forbedring i matematikkundervisningen i skolen ved overgangen fra småskoletrinn til mellomtrinn. At endringen er relativt liten for elever på middels kompetansenivå, men relativt stor i begge ender av fordelingen kan være et tegn på at man blir bedre på differensiering på mellomtrinnet, at man tar bedre vare på både de talentfulle elevene og de som sliter faglig. Vi har ikke data til å gå dypere inn i dette, men ser at det kan være et interessant område for videre forskning.

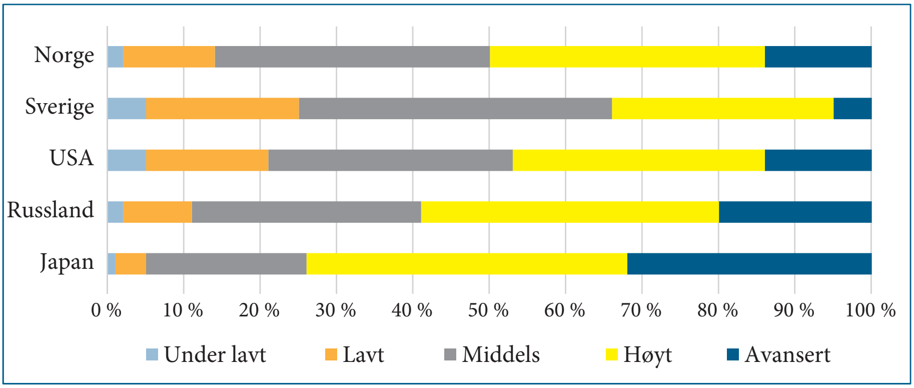
I TIMSS-rapporten konkluderte man med at «*Det er svært positivt at så mange som 14 prosent av de norske elevene er på avansert nivå.*» (Bergem et al., 2016, s. 32). Vi er enige i det, men det er også nødvendig å se de norske resultatene i et bredt internasjonalt perspektiv.

Det er alltid en avveining av ulike hensyn når man velge hvilke land man skal sammenlikne med i rapporter og artikler. I dette delkapitlet har vi valgt å sammenlikne med land som har en ulik profil for hva de vektlegger i matematikk, på samme måte som på ungdomstrinnet: Russland (østeuropeisk), USA (engelskspråklig) og Sverige (nordisk) som alle også deltok i TIMSS Advanced. I tillegg tar vi med Japan for å få med den østasiatiske profilen (se figur 7.5 og tabell 7.6). Vi har her bare lagt inn 5. trinn for Norge, som fra 2015 er definert som hovedpopulasjon på barnetrinnet. Se (Bergem et al., 2016) for mer om skifte av hovedpopulasjon i Norge. Vi sammenlikner de norske resultatene med land som ikke er for langt unna de norske elevene i alder.

Tabell 7.6 Fordeling av elever i noen land på kognitive kompetansenivåer på barnetrinnet, TIMSS 2015. Elevenes gjennomsnittsalder er angitt.

	Alder	Under lavt	Lavt	Middels	Høyt	Avansert
Norge	10,7	2	12	36	36	14
Sverige	10,8	5	20	41	29	5
USA	10,2	5	16	32	33	14
Russland	10,8	2	9	30	39	20
Japan	10,5	1	4	21	42	32

Figur 7.5 Fordeling av elever i noen land på kognitive kompetansenivåer på barnetrinnet, TIMSS 2015.



Elevenes alder er angitt etter navnet på landet. Ved å sammenlikne med land med ulike profiler for hva de vektlegger i sin matematikkundervisning, får vi et bredere og mer utfyllende bilde av situasjonen i Norge sett i et internasjonalt perspektiv.

Som det framgår av figur 7.5 og tabell 7.6, er fordelingen klart bedre for Norge enn for Sverige. Vi har en større andel på avansert og høyt kompetansenivå, og en mindre andel på lavt og under lavt kompetansenivå. Sammenlikner vi med de andre landene, så ser vi noen likhetstrekk mellom Norge og USA, særlig på høyt og avansert kompetansenivå. Dette samsvarer som nevnt med hva mange tidligere analyser har vist, for mer om dette se kapittel 4. I kapittel 5 presenterer vi en ny analyse som dokumenterer det samme: klare likhetstrekk mellom nordiske og engelskspråklige land. I den nedre del av fordelingen har Norge færre på lavt og under lavt nivå enn USA. Slik vi har redegjort for tidligere, gir det indikasjoner på at Norge og USA kanskje er omtrent like gode når det gjelder undervisning på barnetrinnet til elever med talent i matematikk, men at USA i mindre grad enn Norge greier å ta vare på elever som sliter faglig.

Sammenlikner vi med Japan, ser det ut til at de er bedre når det gjelder å gi god undervisning både til de talentfulle elevene og de i den andre enden av skalaen. Dette samsvarer med at Japan generelt har et høyere prestasjonsnivå enn Norge. Land med samme generelle nivå kan imidlertid vise ulik fordeling for de kognitive kompetansenivåene (Bergem et al., 2016). Forskjellen mellom Norge og Russland i generelt prestasjonsnivå er ikke stor (15 poeng) men Russland har en større andel på avansert og høyt nivå enn det Norge har, mens det er mindre forskjell i den andre enden av skalaen. Basert på resultatene presentert i figur 7.5 og tabell 7.6 er det tankevekkende at verken Russland eller Japan har større andel på eller under lavt nivå enn det Norge har. Samtidig har de en langt større andel elever på de to høyeste nivåene, avansert og høyt nivå, enn de nordiske og engelskspråklige landene.

På barnetrinnet, som på ungdomstrinnet, ser det ikke ut til at det at langt flere når opp til høyere nivåer, fører til svakere resultater i landet for elevene i den andre enden av skalaen. Dette er interessant av flere grunner. Er det slik at ved å ta bedre vare på de elevene med spesiell interesse eller anlegg for matematikk, så kan det også ha en positiv innvirkning på de som sliter, for eksempel ved å signalisere at det er et viktig fag som alle kan lære? Eller er det slik at ved å legge mer vekt på de elevene som har spesiell interesse eller anlegg for matematikk, så vil det gå ut over de svakeste elevene? Bildet her er komplekst, og vi har ikke data til å gå dypere inn i det, men på bakgrunn av resultatene fra TIMSS og TIMSS Advanced tillater vi oss å stille disse spørsmålene; vi ønsker både mer forskning og debatt om dette.

7.5 Oppsummering og avsluttende kommentarer

I dette kapitlet har vi presentert resultater fra TIMSS på barne- og ungdomstrinn og TIMSS Advanced i videregående skole i lys av perspektivet «Hvor godt tar norsk skole vare på elever med talent eller spesiell interesse for matematikk?» Inger Wistedt, en svensk skoleforsker, har konkludert med at både svensk og norsk skole har svake tradisjoner når det gjelder å ta vare på disse elevene; hun skriver blant annet:

> *I vissa totalitäre stater testes barn från tidlig alder i syfte att hitta talanger i t.ex. gymnastik och idrott eller i akademiske ämnen, individer som på ett positivt sätt förväntas bidra til samhällsutviklingen. Men* ***i ett demokratisk samhälle har barn ingen skyldighet att utveckla sin talang!*** *Däremot har de en lagstadgad rättighet till det. Det är skolan som har skyldighet att se till att alla barn ges möjlighet att utvecklas efter sin förmåga, vilket också står inskrivet både i den norska og svenska skollagen.»* (Wistedt, 2014, s. 61)

Gjennomgangen av data fra TIMSS Advanced har vist at Norge har den laveste andelen av årskullet som når de høyeste kompetansenivåene i slutten av videregående skole. Situasjonen på ungdomstrinnet er at Norge har få elever på de høyeste kognitive nivåene. I den første rapporten fra TIMSS 2015 står det: «*En utfordring for norsk skole kan imidlertid være å forsøke å øke andelen elever som når avansert nivå.*» (Bergem et al., 2016, s. 34). På 5. trinn er situasjonen bedre: «*Det er svært positivt at så mange som 14 prosent av norske elever er på avansert nivå*» (ibid., s. 32). Men resultatene fra 4. trinn i Norge klart svakere, der var det bare 3 % av elevene som nådde det avanserte kognitive kompetansenivået (se tabell 7.5 og figur 7.4).

Den systematiske gjennomgangen av resultater fra 1995 til 2015 gir oss indikasjoner på hvilke utfordringer man står overfor i norsk skolematematikk for å ivareta talentfulle elever. Vi ser en framgang i elevenes prestasjoner fra

1995 på barnetrinnet, mens bildet er motsatt både for ungdomstrinnet og for elever med full fordypning det siste året i videregående skole. Resultatene for elever på ulike kognitive kompetansenivåer, utviklingen i disse over tid, og sammenlikninger med andre land er bakgrunnen for følgende konklusjoner:

- Norge har en god utvikling på barnetrinnet generelt sammenliknet med 1995. I overgangen fra 4. trinn til 5. trinn er det en positiv utvikling i elevenes prestasjoner, større enn det som regnes som gjennomsnittlig framgang når elever blir ett år eldre og har ett år mer på skolen. Særlig oppløftende er det at det er en markant økning i andelen elever på det øverste kompetansenivået i TIMSS fra 4. trinn til 5. trinn.
- På ungdomstrinnet er situasjonen fortsatt at Norge har en relativt liten andel elever som når opp til det høyeste kompetansenivået sammenliknet med andre land. Det gjelder for både 8. trinn og 9. trinn. Andelen norske elever som når det høyeste kompetansenivået i 2015 er omtrent det samme som andelen i 1995 for elever som da var ett år yngre og som hadde ett år mindre skolegang.
- I slutten av videregående skole har Norge en mindre andel elever av et årskull som når opp til de høyeste kompetansenivåene enn noen av de andre landene som deltok i TIMSS Advanced 2015. Det betyr at i Norge utdanner man en mindre prosentdel av befolkningen til et høyt nivå i matematikk gjennom grunnskole og videregående skole, enn i mange andre land.

For å nå opp til det høyeste kompetansenivået på ungdomstrinnet i TIMSS må elevene, slik dette er definert i studien, vise at de har forståelse innen grunnleggende algebra som det å kunne løse førstegradslikninger og kunne utrykke generaliseringer. For at elever i det siste året i videregående skole skal nå opp til det høyeste kompetansenivået må elevene demonstrerer en klar og tydelig forståelse av begreper og bruk av prosedyrer, og kunne løse komplekse problemer i både algebra, kalkulus, geometri og trigonometri. Basert på våre analyser ser det ut til at de store utfordringene i norsk skolematematikk oppstår på de nivåene i skolen hvor algebra kommer inn som et sentralt faglig emne. I samsvar med norsk læreplan er det på mellomtrinnet, ungdomstrinnet og i videregående skole at algebra kommer inn som et viktig fagområde i matematikk (KD, 2006). For drøfting av algebraens plass i norsk skolematematikk henviser vi til kapittel 6, som tar opp og diskuterer dette spesielt. Her vil vi bare konstatere at det ser ut til at det er på de tidspunktene i skolen som algebra blir viktig og hvor denne typen kunnskap er en forutsetning for å nå de høyeste kompetansenivåene i TIMSS og TIMSS Advanced, at norske elever sliter mest.

At så få norske elever når opp til de høyeste kompetansenivåene i norsk skole fra ungdomstrinnet og oppover, tolker vi som et tegn på at skolen i liten grad har maktet å gi en god nok undervisning for elever med talent eller spesiell interesse for faget. Evner og anlegg for matematikk er antagelig ganske jevnt fordelt i alle land. Alle de internasjonale studiene fra ungdomstrinnet og oppover (basert på en bred internasjonal konsensus om hva som er viktig å lære elevene i matematikk) krever kunnskaper i algebra for å nå de høyeste kognitive nivåene. Vi ser behovet for en grundig debatt om prioritering av innhold og progresjon i norsk skolematematikk.

En viktig årsak til at Norge ikke har så mange på det høyeste nivået kan også skyldes det Skogen (2014a) peker på som et typisk trekk i norsk skole: at man lenge har levd i den villfarelsen at de begavede elevene greier seg selv, og at det å ta mer hensyn til dem blir oppfattet som en ikke ønsket elitisme. Andre forskere i både Norge og Sverige har pekt på dette som en utfordring for skolen (Grønmo, 2014; Idsøe, 2014; Jahr, 2014; Wistedt, 2014). Å ikke ta utfordringen med å gi de dyktigste elevene de utfordringene de trenger for å prestere optimalt, kan vise seg uheldig både fra den enkelte elevs side, og fra samfunnets side. Matematisk begavelse er ansett som et dynamisk karaktertrekk hvor miljø og faglig stimulering er helt avgjørende for at disse elevene skal få utløp for sitt potensial (Smedsrud & Skogen, 2016). Elever med matematisk talent beskrives ofte som kreative og nysgjerrige, de kan visualisere og forestille seg matematiske modeller, og under rette forutsetninger kan de prestere langt over sitt aldersbestemte nivå (Leikin et al., 2017). Mer vekt på matematisk teori og formelle sider av faget kan være en måte for å gi elevene mer spennende utfordringer, mer muligheter til å utfolde seg kreativt, til å utvikle sitt potensial. Matematisk teori og formell matematikk tas opp og drøftes i kapittel 5. Hvis elever med interesse og anlegg for matematikk ikke får den stimulansen de trenger for å prestere optimalt, har det også samfunnsmessige konsekvenser. Man trenger personer med denne type kompetanse på mange ulike områder i et høyt utviklet teknologisk samfunn som det vi lever i.

Den prioriteringen man ser av matematisk innhold i grunnskolens matematikk kan også påvirke hvor mange som finner matematikk så interessant at de ønsker å få lære mer av det i videregående skole. Som det står på Utdanningsdirektoratets nettsider, *«hvis enkelte elever som har spesielle evner og talent innenfor et fag ikke får den oppfølgingen de trenger, kan de bli lei, umotiverte eller utvikle negativ adferd.»* (Idsøe, 2015). En for ensidig vekt på et område som statistikk på bekostning av tall og algebra (for mer om dette, se kapittel 6) kan ha denne (utilsiktede) bivirkningen. Mange analyser av data fra internasjonale studier har vist at de nordiske og engelskspråklige landene har mange av de samme utfordringene, utfordringer som det er viktig å ta tak i og løse. Særlig de østasiatiske landene utmerker seg i TIMSS med en relativt stor andel på de høyeste kompetansenivåene, samtidig som de har en liten andel på de laveste nivåene. Det ser derfor ut til at de har greid å ta vare på de talentfulle elevene uten at det har hatt negative virkninger for elever som sliter faglig. Det ser også ut til at disse landene har greid å oppnå en balanse mellom fagområder som statistikk og algebra i motsetning til vårt land. Se kapittel 6 for mer om dette.

Ved bare å sammenlikne med våre nærmeste naboland, eller land som er svært lik oss i hva som vektlegges i skolematematikken, mister vi muligheten til å få nye ideer som vi kan ha nytte av. Selv om hensikten med å sammenlikne med andre land ikke på noen måte er å kopiere disse, er det nyttig å åpne opp for å se til andre land. Med økende internasjonal konkurranse, og ikke minst når det gjelder utdanning av kompetente borgere, er det nødvendig å se på våre prestasjoner i et bredt internasjonalt perspektiv.

Vi trenger mer forskning, mer utprøving og mer debatt omkring dette i Norge. Et første skritt er å erkjenne problemet og ta på alvor det som står i læreplaner og skolelov om alle elevers rett til tilpasset undervisning, også de mest talentfulle elevene. Myndighetene har tatt tak i dette, blant annet gjennom nedsettelse av Jøsundalutvalget (NOU, 2016). Vi kan se til andre land for å få nye ideer til forbedringer, men dette må følges opp med mer forskning og utprøving av tiltak nasjonalt, slik at det vi gjør kan implementeres med utgangspunkt i egen kultur og egenart.

KAPITTEL 8

Oppgaver i algebra fra TIMSS Advanced 2015

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Ingvill Merete Stedøy
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Matematikksenteret, NTNU, Trondheim
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet algebra i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapittelet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og for «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

Norge	10,6 %	18,7 år
Sverige	14,1 %	18,7 år
USA	11,4 %	18,1 år
Russland	10,1 %	17,7 år
Slovenia	34,4 %	18,8 år
Frankrike	21,5 %	18,0 år
Portugal	28,5 %	18,1 år

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i algebra, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

Algebraoppgave 1
Knowing, Find an equivalent fraction

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x - y}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

MA13011		A*	B	C	D	E	Ikke svart
Norge	1998	30	15	12	30	7	7
	2008	25	12	13	39	8	4
	2015	23	22	14	27	8	7
Sverige		20	12	12	41	7	7
USA		42	14	8	30	4	2
Russland		58	13	13	9	6	2
Slovenia		55	13	6	20	4	2
Frankrike		44	18	5	18	10	5
Portugal		61	16	4	10	7	3
Int. gj.snitt		49	14	8	19	7	4

Dette er en flervalgsoppgave som tar sikte på å teste om elevene har elementære faktakunnskaper i algebra, i dette tilfellet elementære kunnskaper når det gjelder konjugatsetningen. Oppgaven kan løses ved å multiplisere med $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ i teller og nevner, og deretter bruke konjugatsetningen på nevneren. Ved korrekt utregning får man da det som står i alternativ A. Det er ikke så vanlig i oppgaver og lærebøker i Norge at elevene skal bruke kvadratsetningene, her konjugatsetningen, på uttrykk hvor x eller y står under et rottegn. Det legges heller ikke lenger vekt på å gjøre om brøkuttrykk slik at det ikke forekommer rottegn i nevneren i det endelige svaret. Begge disse forholdene kan ha bidratt til usikkerhet hos de norske elevene.

Internasjonal gjennomsnittlig løsningsprosent på denne oppgaven er nær 50 %, mens den i Norge er litt over 20 %, og i Sverige 20 %. I de andre landene varierer andelen med rett svar fra vel 40 % til vel 60 %. Det svake norske resultatet framstår enda svakere hvis man tar med dekningsgrad i vurderingen. Frankrike har dobbelt så høy dekningsgrad som Norge, Portugal over to og en halv gang så høy og Slovenia over tre ganger så høy dekningsgrad som Norge. Tar man dekningsgraden med i vurderingen av resultatene, framstår Norge og Sverige som spesielt svake. Dette er en oppgave som har vært med i begge de to foregående TIMSS Advanced-studiene. Det er verdt å merke seg en jevn tilbakegang i prestasjon hos norske elever på denne oppgaven.

Det vanligste feilsvaret i nesten alle land er alternativ D. De elevene som har valgt D, kan ha tenkt at de kan dele opp uttrykket i to brøker direkte. Det indikerer at deres generelle kunnskaper om brøk og bruk av fellesnevner ikke er godt befestet. En relativt stor del av de norske elevene gjør feilen å velge alternativ B, noe som kan tyde på at de er usikre i bruken av kvadratsetningene. Mange elever, selv på dette nivået, ser ut til å tro at $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x - y$. I motsetning til de som har valgt alternativ D, har de vært innom en kvadratsetning, men har brukt den feil.

I USA har også en betydelig andel, 30 %, valgt feilsvaret D. Men i motsetning til i de nordiske landene har likevel flest elever i USA valgt det riktige alternativet A. Mange analyser av lands profiler når det gjelder matematikkundervisning (se kapittel 3), viser at vi har en relativt stabil nordisk profil og engelskspråklig profil. Samtidig finner vi fellestrekk mellom disse to profilene, som relativt liten vekt på algebra i skolen. Man skal være forsiktig med å trekke vidtrekkende konklusjoner basert på enkeltoppgaver, men det er likevel interessant å se at resultatet på denne oppgaven faller inn i mønsteret som tidligere analyser av ulike profiler i matematikkundervisningen har vist. For mer om dette, se kapittel 4 og 5.

To land som gjør det relativt bra på denne oppgaven, er Russland og Slovenia, med godt over 50 % som svarer riktig. Dette samsvarer også med tidligere analyser av matematikkundervisningen i østeuropeiske land, som sammen med østasiatiske land legger mer vekt på å lære elevene algebra enn det som gjøres i nordiske og engelskspråklige land (Grønmo, Kjærnsli & Lie, 2004; Olsen & Grønmo, 2006).

De europeiske latinspråklige landene Portugal og Frankrike presterer også relativt bra på denne oppgaven, spesielt hvis vi tar hensyn til dekningsgradene.

Algebraoppgave 2
Knowing, Cubing a trigonometric function

Dersom $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, så er z^3 lik:

Ⓐ 0

Ⓑ 1

Ⓒ i

Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$

Ⓔ $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8}$

MA13012		A	B	C*	D	E	Ikke svart
Norge	1998	3	16	27	35	6	12
	2008	3	13	24	44	7	10
	2015	2	13	22	44	8	11
Sverige		4	18	31	27	13	7
USA		3	6	25	41	20	5
Russland		2	10	35	36	11	6
Slovenia		4	8	22	33	27	7
Frankrike		2	9	37	32	13	8
Portugal		2	6	35	31	16	11
Int. gj.snitt		3	10	34	32	14	9

Dette er en flervalgsoppgave som inneholder komplekse tall. Elevene kan løse den ved å bruke at $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, slik at når de opphøyer i tredje, får de $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$. Alternativt kan de benytte seg av $i^2 = -1$ når de løser opp parenteser og trekker sammen leddene, og sette inn de eksakte verdiene til cosinus og sinus. I heftene for testen som elevene får utdelt, står det oppgitt en del formler som $i^2 = -1$ og eksakte verdier for sinus til 30, 45 og 60 grader. Elevene gjøres oppmerksom på dette som en del av gjennomgangen før de begynner å løse oppgaver.

Norge presterer svakest av alle landene på denne oppgaven, særlig når vi tar dekningsgraden med i vurderingen. Det er ikke så overraskende, siden komplekse tall ikke står nevnt i den norske læreplanen. Likevel kan man anta at norske elever møter noe om komplekse tall i forbindelse med løsning av 2. ordens homogene differensiallikninger. Da skal de løse en karakteristisk likning, og kan få komplekse tall som løsninger. Men generelt er det liten vekt på komplekse tall i norsk skole siden det ikke står i læreplanen. De fleste norske elevene, hele 44 %, velger feilsvaret D. Det ser derfor ut som om det ligger et bevisst valg bak de norske elevenes svar, særlig siden mønsteret er stabilt i alle de tre rundene av studien. Her har de kanskje tenkt at $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + i\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$. Det er altså utregningen av parentesen opphøyd i tredje som er den mest graverende algebrafeilen etter vår mening. De tar ikke hensyn til i-en, og vet neppe hva den betyr. Nå har man også hatt studier som viser at elever tenderer mot å velge svar som ser mest mulig kompliserte ut dersom de ikke vet hvilket svar som er riktig.

I mange andre land er komplekse tall med i læreplanen i videregående skole. Det betyr ikke at Norge uten videre skal ta det inn i den norske læreplanen. Vi skal ikke endre norsk læreplan bare for å prestere best mulig på en internasjonal studie som TIMSS Advanced. Informasjon vi får ved å delta i TIMSS Advanced, er naturlig å ta med når man drøfter hva som skal være med av innhold i læreplanen, men begrunnelsene for valg av innhold bør være basert på faglige prioriteringer av hva som er viktig for elevene å lære, ikke styres av hva som testes i internasjonale studier.

Algebraoppgave 3
Applying, Value of x to make function negative

Funksjonen f definert ved

$$f(x) = \frac{(x-1)(3x+1)}{(2x-1)(x-2)},$$

er negativ for alle x som er slik at

Ⓐ $-\frac{1}{3} < x < 3$

Ⓑ $\frac{1}{2} < x < 2$

Ⓒ $1 < x < 3$

Ⓓ $\frac{1}{2} < x < 2$ eller $2 < x < 3$

Ⓔ $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ eller $1 < x < 2$

MA13013		A	B	C	D	E*	Ikke svart
Norge	1998	7	9	7	7	64	6
	2008	8	14	9	14	48	8
	2015	7	18	9	11	45	11
Sverige		10	17	14	13	34	12
USA		8	22	6	9	52	3
Russland		6	10	6	7	68	3
Slovenia		10	17	8	12	49	5
Frankrike		7	14	5	10	56	8
Portugal		9	12	5	8	59	7
Int. gj.snitt		8	16	7	9	54	7

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som er konstruert med sikte på å teste elevenes evne til å anvende sin kunnskap om funksjoner for å finne ut i hvilke områder funksjonen har en negativ verdi. En nærliggende metode for å avgjøre det, er å tegne fortegnslinjeskjema for faktorene i funksjonen. Det riktige svaret er alternativ E.

Innholdet i oppgaven er pensum i R1 og passer på den måten godt inn i det som er norsk tradisjon. Likevel er de norske resultatene svake, svakere enn i alle de andre landene bortsett fra Sverige, som skårer enda lavere enn Norge. Årsaken til de svake resultatene i Norge kan være dårlig vedlikehold av det elevene lærte i R1, og at de dermed har glemt denne kunnskapen når de er på slutten av R2-kurset. Vi synes likevel at det er rart at elevene ikke klarer denne, da de også har funksjonsdrøfting i R2 – riktignok med vekt på andre typer funksjoner. Vedlikehold av kunnskap er sentralt i et fag som matematikk, mer sentralt enn i mange andre skolefag. Matematikk er i sin natur et hierarkisk fag der kunnskaper bygger på hverandre. Det er også viktig å huske på at kunnskap som er forstått, lettere kan tas i bruk enn kunnskap som bare ble memorert ved innlæring.

Det har vært en vanlig oppfatning i Norge at man ikke skulle teste elevene til eksamen i det de hadde lært i tidligere år (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Dette har endret seg i senere tid, og nå er det akseptert at man på eksamen kan testes også i det som var pensum i tidligere kurs. Det svake norske resultatet på denne oppgaven gir likevel indikasjoner på at man fortsatt trenger å bli bedre på å vedlikeholde tidligere kunnskap.

Algebraoppgave 4
Knowing, Which term has a value of 243?

I den geometriske følgja $\frac{1}{3}, 1, 3, \ldots, t_n, \ldots$ er t_n ledd nummer n. Kva for eit ledd har verdien 243?

A t_6

B t_7

C t_8

D t_{81}

MA23005		A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	2008	13	60	6	18	3
	2015	15	59	7	16	3
Sverige		14	45	12	24	6
USA		14	61	8	12	6
Russland		11	71	5	13	1
Slovenia		11	57	8	19	5
Frankrike		31	34	5	27	3
Portugal		10	46	12	24	9
Int. gj.snitt		16	50	8	20	6

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som tar sikte på å teste elevenes faktakunnskaper om geometriske rekker. Siden heftene som elevene får, inneholder en del formler, blant annet formler for sum og n-te ledd i en geometrisk rekke, burde ikke oppgaven være så vanskelig. Elevene gjøres oppmerksomme på disse formlene ved gjennomgangen før de begynner å løse oppgaver. Elevene kan bruke den oppgitte formelen og enten ved hjelp av logaritmer eller på andre måter løse den likningen man får, for å finne det riktige svaret. Elevene kan dessuten bare gange seg framover og se at de treffer tallet i det 7. leddet, og trenger ikke å bruke formelen i det hele tatt. Hvis de har forstått definisjonen av geometriske tallfølger, og ser at kvotienten er 3, skal dette være en oppgave alle bør få til. Alternativ B er løsningen på oppgaven.

Rekker er en sentral del av læreplanen i R2, og det er derfor rimelig å forvente at mange norske elever skal greie å løse oppgaven riktig. Elevene skal kunne *«utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker»*, står det i læreplanen (https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r2).

Det norske resultatet med tilnærmet 60 % som gir rett svar, er bedre enn det internasjonale snittet på 50 %. Det er bare Russland som har en klart større andel med rett svar på denne oppgaven. Tar man hensyn til dekningsgraden i landene, framstår derimot ikke det norske resultatet fullt så bra. Russland har omtrent samme dekningsgrad som Norge, men Slovenia har en dekningsgrad over tre ganger så høy som Norge, Portugal over to og en halv gang så høy og Frankrike dobbelt så høy som Norge. Likevel er hovedkonklusjonen at dette er en algebraoppgave med relativt gode norske resultater.

Algebraoppgave 5
Knowing, How many 3 digits numbers formed

Ein boks inneheld 6 kuler, nummerert frå 1 til 6. Jon tek 3 kuler frå boksen, ei etter ei, utan å sjå på tala. Han legg kulene på rad i same rekkjefølgje som han tok dei frå boksen. Kor mange ulike tresifra tal kan han danne på denne måten?

Svar: ____________

MA23145		10 Rett svar: 120	70 Feil svar: 216	79 Andre feil	Ikke svart
Norge	2008	30	11	50	9
	2015	42	6	40	12
Sverige		32	6	55	7
USA		33	7	57	4
Russland		36	6	46	13
Slovenia		54	2	38	6
Frankrike		15	15	63	6
Portugal		67	1	28	4
Int. gj.snitt		33	7	57	4

Dette er en åpen oppgave, altså uten gitte svaralternativer, hvor elevene selv skal beregne det riktige svaret og skrive det ned. Oppgaven tar sikte på å teste elevene i en type elementær kunnskap, faktakunnskaper på området kombinatorikk. Oppgaven presenteres i en konkret kontekst, noe som vektlegges i norske læreplaner på alle nivåer. Oppgaven løses ved bruk av kombinatorisk resonnement. Dette er et ordnet utvalg uten tilbakelegging, som er en av standardsituasjonene de norske elevene har arbeidet med. Ved første trekk har man 6 muligheter for hvilken kule man får, ved andre trekk 5 muligheter og ved tredje trekk 4 muligheter. Antall muligheter for hvert trekk multipliseres så med hverandre og gir $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, som er det riktige svaret. Hvis elevene har behandlet dette som et ordnet utvalg med tilbakelegging, det vil si at det er 6 mulige valg hver gang man trekker en kule, får man feilsvaret 216 basert på utregning av $6 \cdot 6 \cdot 6$. Dette feilsvaret har fått en egen kode for å se hvor mange prosent som gjorde denne feilen.

Kombinatorikk er ikke spesielt sentralt stoff i R2, det er mer sentralt i R1 og på lavere nivåer i skolen. Ut fra læreplanen og hva som presenteres i lærebøker, skal elever helt ned på mellomtrinnet kunne få til denne oppgaven. Norske elevers prestasjoner på oppgaven er likevel relativt gode sammenliknet med de andre landene, og det er bare i Portugal og Slovenia at en større andel av elevene svarer rett. I disse landene er det en klart større andel som svarer riktig, og tar man også dekningsgraden med i vurderingen, er deres resultater langt bedre enn de norske. På den andre siden er spesielt de franske resultatene svake på denne oppgaven. Også elever i Sverige, USA og Russland presterer svakere enn norske elever. Dette ser ut til å være en oppgave med store variasjoner mellom land når det gjelder vektlegging av det innholdet den tester elevene i, nemlig kombinatorikk. Denne delen av algebra har tradisjonelt ikke har vært veldig sentral i skolematematikken, men i Norge er kombinatorikk og sannsynlighet et tema helt ned på mellomtrinnet.

Det er også interessant å merke seg at Norge har en klar framgang i andelen som løser oppgaven riktig fra 2008 til 2015. Det samme mønsteret fins i Sverige, selv om vi ikke har lagt det inn i tabellen over. Det kan se ut til at denne typen oppgaver står relativt sterkt i nordiske land. Merk at denne oppgaven neppe ville ha blitt kategorisert som algebra i en norsk skolekontekst. Kombinatorikk er i Norge et tema som behandles sammen med statistikk og sannsynlighet. At både Norge og Sverige har framgang fra 2008, kan være et tegn på økende vektlegging av dette i disse landene. Dette eksemplifiserer at når man diskuterer resultater fra studiene, bør man ikke bare se overflatisk på kategoriseringer som «algebra» og «statistikk». Man må også se på hvilket innhold som er definert til å ligge innenfor emneområdene.

Algebraoppgave 6
Applying, New diameter of soup can

Ei bedrift lagar boksar med sylinderform som har diameter 6 cm, og som kan innehalde 600 cm^3 suppe. Bedrifta ønskjer å endre diameteren til boksane, men halde høgda uendra, slik at boksane kan innehalde 750 cm^3 suppe. Kva må den nye diameteren vere?

Vis framgangsmåten.

MA23187		20 Helt riktig	21 Helt riktig med kalkulator	10 Delvis riktig	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	2008	56	1	18	18	8
	2015	51	0	23	17	8
Sverige		57	0	9	25	8
USA		40	1	18	36	4
Russland		39	1	12	31	17
Slovenia		32	0	34	27	7
Frankrike		33	0	12	42	14
Portugal		43	0	14	35	8
Int. gj.snitt		40	0	16	31	12

Dette er en algebraoppgave hvor elevene må kunne bruke formelen for volumet av en sylinder. Oppgaven har altså et geometrielement i seg i tillegg til det algebraiske. Elevene må finne en løsningsmetode, beskrive framgangsmåten og skrive ned svaret. Oppgaven er kognitivt kategorisert som anvendelse av kunnskap.

Formelen for volumet av den sylinderformede boksen er oppgitt i formelsamlingen i begynnelsen av heftene. Elevene gjøres oppmerksomme på disse formlene før de begynner å løse oppgaver. Oppgaven kan løses ved å sammenlikne formelen for volumet til den opprinnelige boksen med formelen for den nye boksen. Siden høyden h er den samme, kan høyden elimineres. Det uttrykket man da får, kan brukes til å finne diameteren i den nye boksen. Svarene 6,72; 6,7 og $3\sqrt{5}$ aksepteres alle som riktige, og eleven får en kode på 20-nivå.

Vi har angitt både 20- og 21-koden i tabellen over. 21-koden skulle fange opp de elevene som oppga en riktig likning for å løse oppgaven, men brukte kalkulator for å løse likningen. Som vi ser, var det omtrent ingen elever som brukte kalkulator her. Elever som har brukt en riktig metode, men som har gjort en feil underveis, fikk kode 10.

På tross av en svak tilbakegang fra 2008 er det norske resultatet godt i et internasjonalt perspektiv, og klart over det internasjonale gjennomsnittet. Oppgaven er i samsvar med norsk læreplan i matematikk som gjennomgående legger relativt stor vekt på at oppgaver til elevene skal være praktiske og konkrete. Formelregning er med i læreplanene fra 8. trinn. Dessuten kan vi regne med at mange elever som velger R2, er vant til mye formelregning i fysikk. Svenske elever presterer også bra på oppgaven. Prestasjonene i Slovenia og Russland er relativt svake. Dette samsvarer med tidligere profilanalyser av land (se kapittel 4), hvor land med en østeuropeisk profil legger relativt stor vekt på ren, abstrakt matematikk, men ikke like stor vekt på praktiske anvendelser.

Algebraoppgave 7
Reasoning, What is the error Carl made?

Carl vil løyse likninga $\ln(2x-1)=0$. Løysingsforsøket hans er vist nedanfor, men inneheld ein feil.

$$\begin{aligned} &\ln(2x-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\ln 2x - \ln 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\ln 2x - 0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\ln 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ &2x = 1 \\ \Leftrightarrow\ &x = 0{,}5 \end{aligned}$$

Kva for ein feil gjorde Carl?

MA23201		10 Rett svar	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	2008	24	54	22
	2015	43	42	16
Sverige		38	40	23
USA		38	55	7
Russland		49	37	13
Slovenia		45	45	11
Frankrike		63	31	6
Portugal		55	39	6
Int. gj.snitt		48	41	12

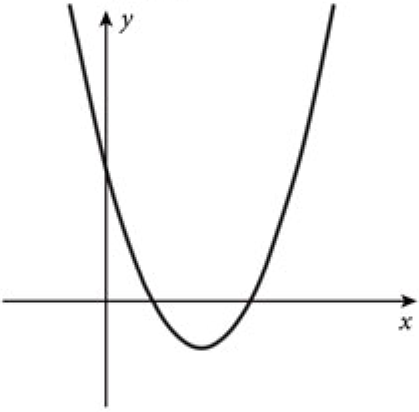
Dette er en åpen resonnementsoppgave hvor elevene skal finne fram til og forklare hvilken feil Carl gjorde når han prøvde å løse den gitte likningen. De skal ikke gjøre noen egne beregninger, men se på det som presenteres som et elevsvar, og finne den feilen Carl har gjort. Nesten alle elevene som fikk rett på oppgaven, forklarte hvilken feil som var gjort i utregningen med logaritmer, og henviste til overgangen mellom linje 1 og linje 2. Noen få elever fikk også rett hvis den generelle forklaringen om hvordan man regner med logaritmer stemte, men uten en eksplisitt henvisning til overgangen mellom disse to linjene.

Selve likningen i denne oppgaven er mer i overensstemmelse med det elevene jobber med i R1, enn det de arbeider med i R2. Konteksten med å finne en feil i andres utregning er en noe uvant oppgavetype for norske elever, selv om egenvurdering og vurdering av hverandre har blitt ganske vanlig i norske klasserom. De norske resultatene er litt svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. Frankrike og Slovenia presterer godt på oppgaven, tatt i betraktning den store dekningsgraden i disse landene. Svenske elever presterer litt svakere enn de norske elevene.

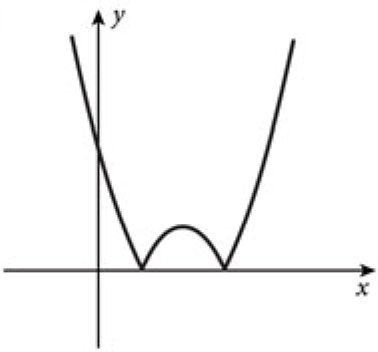
Det positive i et norsk perspektiv er den klare framgangen fra 2008. Det kan tenkes flere årsaker til dette. En mulig årsak er at man de senere årene har blitt flinkere til å vedlikeholde det stoffet elevene jobber med i R1, fordi det nå er akseptert at elevene i videregående skole også kan testes til eksamen i stoff som står i læreplanen på lavere trinn. En annen mulig årsak er at det kan ha blitt mer fokus på egenvurdering og hverandrevurdering samt refleksjon og diskusjon i norsk matematikkundervisning. Det har i forbindelse med offentliggjøring av tidligere rapporter vært diskutert at det er en tendens til ensidighet i metoder i matematikk, med mye vekt på individuell oppgaveløsing og lite vekt på diskusjoner og refleksjoner (Grønmo et al., 2012; Grønmo et al., 2010).

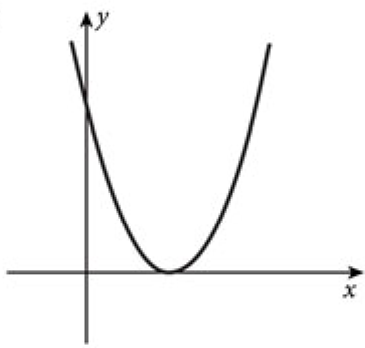
Algebraoppgave 8
Knowing, Absolute value of parabola below x-axis

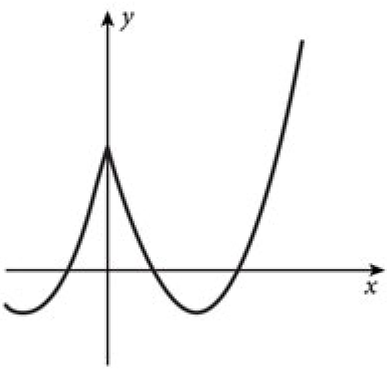
Grafen til $y = f(x)$ er vist her.

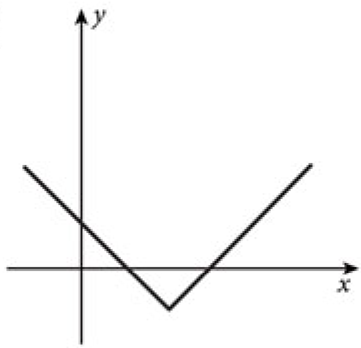


Hvilken av følgende grafer viser $y = |f(x)|$?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


MA33086	A*	B	C	D	Ikke svart
Norge	55	29	6	9	3
Sverige	43	20	9	26	1
USA	54	14	1	29	1
Russland	72	12	6	10	0
Slovenia	88	6	4	1	1
Frankrike	62	23	2	12	1
Portugal	86	7	2	5	0
Int. gj.snitt	66	18	5	11	1

Dette er en flervalgsoppgave som tester om elevene ser sammenhengen mellom grafene til $f(x)$ og $|f(x)|$. For å løse oppgaven må elevene vite at tallverdi/absoluttverdi betyr at alle verdier blir positive, det vil si at hele grafen må ligge over x-aksen. Det betyr at alternativ C og D ikke kan være riktige; her har grafen for den nye funksjonen både positive og negative verdier siden den ligger både over og under x-aksen. Man står da igjen med alternativ A eller B. En del elever velger alternativ B, som heller ikke er riktig. Disse elevene vet at tallverdien må være positiv, men de vet ikke på hvilken måte grafen endrer seg. Det riktige svaret er alternativ A, som bare har positive verdier, og hvor grafen endrer seg på riktig måte. Den delen av grafen som er under x-aksen for $f(x)$, blir speilet om x-aksen for å få grafen til $|f(x)|$.

Norge og USA presterer svakt på oppgaven, Sverige enda svakere. De øvrige landene presterer svært bra når dekningsgrad tas i betraktning, særlig gjelder det Slovenia og Portugal. Tar man med i vurderingen dekningsgraden i de ulike landene framstår altså forskjellen mellom prestasjonene i landene enda større.

Norge har over 80 % av elevene fordelt på alternativene A og B. Det indikerer at de norske elevene vet at tallverdien gir positive funksjonsverdier, men at mange ikke vet hvordan grafen endrer seg. Rundt en tredel av elevene i USA og Sverige ser ikke ut til å vite at tallverdi betyr bare positive verdier, siden en så stor del av elevene i disse landene velger feilsvarene C og D. De fleste velger D; kanskje de tror at symbolet for absoluttverdi betyr at de skal «rette ut» grafen?

På denne oppgaven, som på flere andre oppgaver i algebra, er det de nordiske og engelskspråklige landene som presterer svakt, mens østeuropeiske land presterer godt. Også dette er et resultat som samsvarer med tidligere analyser av hva som kjennetegner matematikkundervisningen i ulike land.

Algebraoppgave 9
Knowing, Polynomials satisfying conditions

Avgjør om hvert polynom tilfredsstiller **begge** disse to betingelsene:

- Polynomet er av grad 3
- De eneste to røttene er 3 og 5

	Ja	**Nei**
$(x-3)^2\,(x-5)$	○	○
$(x-3)^3\,(x-5)^3$	○	○
$(x+3)^2\,(x+5)$	○	○
$(x-3)\,(x-5)^2$	○	○
$(x-5)^3$	○	○

I denne oppgaven skal elevene avgjøre om fem polynomer oppfyller to gitte betingelser. Elevene skal svare «Ja» eller «Nei» på spørsmålet om polynomet oppfyller betingelsene linje for linje. Vi refererer til første linje som spørsmål A), andre linje som spørsmål B), tredje linje som spørsmål C), fjerde linje som spørsmål D) og femte linje som spørsmål E). Oppgaven er i sin helhet kategorisert kognitivt som det å kunne noe. Gjettefaktor er 50 % for hvert spørsmål.

Oppgaven tester om elevene vet hva det betyr at et polynom skal være av grad 3, samtidig som de eneste to røttene skal være 3 og 5. Disse betingelsene innebærer at polynomet må ha en dobbeltrot, enten for 3 eller for 5. De to polynomene som oppfyller begge disse betingelsene, er A) og D). Vi presenterer resultatene for disse to polynomene først.

Resultater for spørsmålene i linje A) og D)

MA33225A	Ja*	Nei	Ikke svart
Norge	62	31	8
Sverige	60	35	6
USA	71	27	3
Russland	61	33	7
Slovenia	81	18	1
Frankrike	64	31	5
Portugal	68	29	3
Int. gj.snitt	67	27	6

MA33225D	Ja*	Nei	Ikke svart
Norge	61	31	8
Sverige	60	33	7
USA	71	26	3
Russland	60	32	8
Slovenia	82	17	1
Frankrike	64	30	6
Portugal	67	28	5
Int. gj.snitt	67	27	6

I linje A) har polynomet en dobbeltrot lik 3 og en enkeltrot lik 5. I linje D har polynomet en dobbeltrot lik 5 og en enkeltrot lik 3. Begge polynomene er av grad 3, så de to betingelsene er oppfylt, og det riktige svaret på spørsmålet er «Ja».

Det norske resultatet er litt under internasjonalt snitt for både linje A) og linje D). De to landene som presterer best, er Slovenia og USA. Aller best er Slovenia, og de er samtidig det landet som har den høyeste dekningsgraden.

Resultater for spørsmålene i linje B), C) og E)

MA33225B	Ja	Nei*	Ikke svart
Norge	24	67	8
Sverige	33	63	4
USA	27	71	2
Russland	31	62	8
Slovenia	13	85	2
Frankrike	23	72	5
Portugal	21	76	3
Int. gj.snitt	23	72	5

MA33225C	Ja	Nei*	Ikke svart
Norge	46	47	8
Sverige	24	70	6
USA	16	82	3
Russland	10	81	9
Slovenia	9	88	2
Frankrike	17	77	6
Portugal	21	75	5
Int. gj.snitt	20	74	6

MA33225E	Ja	Nei*	Ikke svart
Norge	20	72	8
Sverige	24	70	6
USA	9	88	3
Russland	14	78	9
Slovenia	6	92	2
Frankrike	12	82	6
Portugal	12	84	4
Int. gj.snitt	14	80	6

Polynomene i linje B), C) og E) oppfyller én av betingelsene, men ikke begge to. Svaret på disse tre spørsmålene blir derfor «Nei». Linje B tilfredsstiller kravet om at røttene skal være 3 og 5, men polynomet er ikke av grad 3. Polynomet i linje C) er av grad 3, men røttene er –3 og –5, ikke 3 og 5. Polynomet i linje E) er av grad 3, men har bare én trippelrot 5.

Resultatene på disse tre linjene skiller seg generelt ikke så mye fra hverandre, eller fra resultatene for linje A) og D) hvor svaret på spørsmålet var «Ja». Det eneste unntaket er norske elevers svar på linje C), hvor Norge har en klart høyere andel enn de andre landene av elever som svarer at dette polynomet oppfyller begge betingelsene. Det ser ut til at norske elever i større grad enn i andre land roter med fortegnet, de tar ikke hensyn til om det står + eller − i parentesene. Norske elever er vant til å faktorisere polynomer ved å finne nullpunktene. Når de da får nullpunktene $x = 3$ og $x = 5$, er det svært vanlig at de tror at faktorene skal være $(x + 3)$ og $(x + 5)$. Da er det ikke usannsynlig at de gjør samme feil når de skal resonnere den andre veien. Det kan være at elever i Norge i mindre grad enn i andre land har reflektert over sammenhengen mellom tegnet i parentesen og hvilket fortegn roten har.

Resultatet for Norge på alle de fem spørsmålene i oppgaven er svakere enn internasjonalt gjennomsnitt, og svakere enn de fleste andre landene. Spesielt på linje C) presterer de norske elevene svakere enn elevene i andre land. Det landet som gjennomgående markerer seg med gode resultater, er Slovenia, med mellom 81 % og 92 % av elevene som svarer rett på alle de fem spørsmålene. Dette samsvarer med tidligere analyser som har vist at Slovenia er et land som legger relativt stor vekt på ren matematikk som algebra på alle nivåer i skolen, noe det er rimelig å anta har ført til en dypere forståelse hos deres elever. (Jamfør diskusjonen om progresjonsproblematikk i kapittel 5.)

Algebraoppgave 10
Reasoning, Evaluate alternating expression when $x = 3$

Finn verdien til det algebraiske uttrykket

$$x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 99x - 100x$$

når $x = 3$.

Svar: ______________

MA33142	10 Rett svar	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	23	56	21
Sverige	28	58	14
USA	30	63	7
Russland	50	37	13
Slovenia	20	65	15
Frankrike	31	43	26
Portugal	29	42	28
Int. gj.snitt	30	51	19

Dette er en åpen oppgave. Siden det ikke er noe krav om at elevene skal vise hvordan de kom fram til svaret, har vi ingen informasjon om hvordan elevene har tenkt. Oppgaven er kategorisert kognitivt som resonnering.

Oppgaven kan løses ved å lete etter et mønster i den alternerende følgen av algebraiske uttrykk. Første ledd x vil sammen med nest siste ledd $99x$ gi $100x$, andre ledd $-2x$ vil sammen med tredje siste ledd $-98x$ gi $-100x$. Disse to summene slår hverandre ut. På samme måte kan man fortsette til man bare står igjen med $+50x$ som midterste leddet og $-100x$ som siste ledd. Slår vi disse sammen får vi $(-100x+ 50x) = -50x$. Setter man her inn verdien $x = 3$, får man det riktige svaret på oppgaven, som er -150. Oppgaven kan også løses ved at elevene slår sammen to og to etterfølgende ledd, og får $-x$ hver gang, totalt 50 ganger. Svaret blir igjen $-50x$, som blir -150 når $x = 3$.

Elevene må selv resonnere seg fram til et mønster i den alternerende rekken av algebraiske uttrykk; de har ikke noen formel de kan bruke for å finne løsningen. Oppgaven stiller krav til det vi kan kalle abstrakt resonnering og mønstergjenkjenning. Elevene i Norge er vant til både endelige og uendelige rekker, men har antakelig lite erfaring med alternerende rekker der de selv må finne et mønster. Ifølge læreplanen i R2 skal elevene kunne behandle rekker som ikke er geometriske eller aritmetiske («summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler»), men dette blir trolig mindre vektlagt da det sjelden gis til eksamen. Oppgaven faller relativt vanskelig ut i de fleste land, men tar man hensyn til dekningsgraden, framstår det norske resultatet som det aller svakeste. Russlands resultat er best, særlig hvis vi tar med i vurderingen at deres elever er noe yngre enn elevene i de andre landene. Også Portugal og Frankrike presterer ganske bra, hvis man tar hensyn til den relativt høye dekningsgraden i disse landene.

Algebraoppgave 11
Applying, Sum of geometric series alternating signs

Hva er summen av denne geometriske rekken?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\dots$$

(A) 2

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $-\frac{1}{3}$

MA33044	A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	13	18	51	13	6
Sverige	14	17	45	18	6
USA	12	20	48	16	5
Russland	13	17	53	14	3
Slovenia	14	20	44	12	10
Frankrike	16	22	40	14	9
Portugal	12	24	38	15	12
Int. gj.snitt	14	20	42	14	10

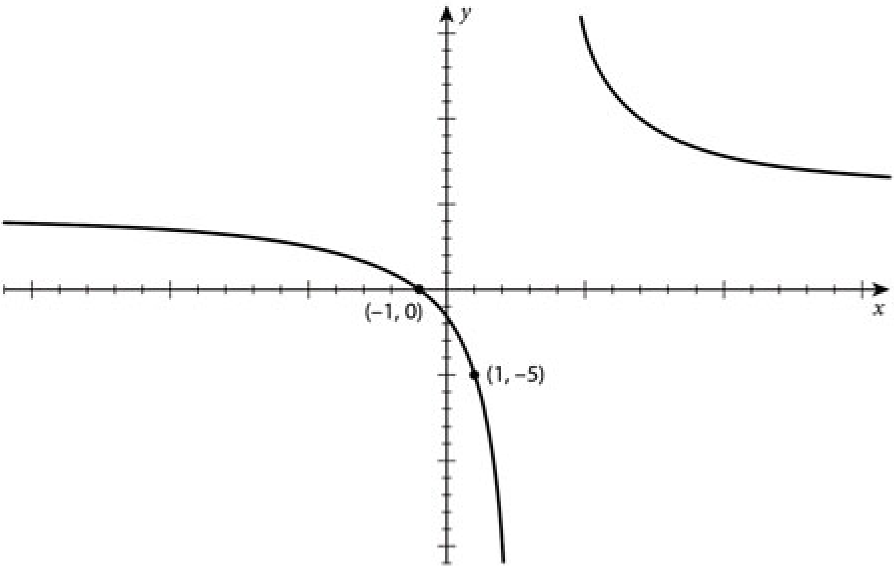
Norske elever presterer relativt bra på denne flervalgsoppgaven sammenliknet med andre land i studien. Russland ligger enda litt høyere.

Elevene skal her anvende kunnskaper om geometriske rekker og potenser for å finne det riktige alternativet. Formelen for å beregne summen av en geometrisk rekke står innledningsvis i de heftene elevene får. I gjennomgangen før elevene begynner å løse oppgaver gjøres elevene oppmerksomme på de formlene som står der, og som de kan benytte seg av når de løser oppgavene. Elevene må vite at et tall opphøyd i 0-te potens gir 1 for alle tall forskjellig fra 0, det betyr at det første leddet i rekken er 1. Kvotienten til den uendelige geometriske rekken er $-\frac{1}{2}$. Da skal elevene vite at rekken konvergerer, og at de kan bruke formelen for summen av en konvergent geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = -\frac{1}{2}$: $s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$. Riktig svar er alternativ C.

Valg av feilsvar fordeler seg på de ulike svaralternativene i alle land, med en liten overvekt på alternativ B. Problemet for de elevene som har valgt alternativ B) kan være at de gjør en feil når de skal beregne $\frac{1}{3/2}$. Feilsvaret A kan man få ved å gjøre en fortegnsfeil; ved å bruke $k = \frac{1}{2}$ i stedet for $k = -\frac{1}{2}$ blir svaret 2. Feilsvar D får elevene dersom de velger $a_1 = -\frac{1}{2}$, det vil si at de ser bort fra at uttrykket er opphøyd i 0-te, men da er det ikke lenger en geometrisk rekke!

Oppgaven går rett inn i det som er pensum i R2, og den passer godt med hva norske elever er vant til å testes i på prøver og eksamener. At de har fått oppgitt formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke kan trolig ha gitt dem god hjelp, og også at det står oppgitt at rekken er geometrisk.

Algebraoppgave 12
Applying, Solve for 2 rational coefficients given 2 points



Grafen til funksjonen $f(x) = \dfrac{ax+5}{x+b}$ er vist over. Finn verdiene til a og b.

$a =$ ________________

$b =$ ________________

MA33179	10 Både *a* og *b*	70 Bare *a*	71 Bare *b*	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	22	15	2	38	23
Sverige	18	12	2	48	21
USA	26	16	1	48	9
Russland	41	14	1	23	22
Slovenia	34	28	0	30	8
Frankrike	26	14	1	34	26
Portugal	31	20	2	32	16
Int. gj.snitt	33	16	1	32	18

Dette er en åpen oppgave. Siden det ikke er noe krav om at elevene skal vise hvordan de fant svaret, mangler vi informasjon om hvordan de har løst den. Kognitivt er oppgaven kategorisert som anvendelse av kunnskap.

I oppgaven får elevene vist grafen til en funksjon samt funksjonsuttrykket for denne. På grafen er det tegnet inn to punkter hvor koordinatene er oppgitt. Ved å sette inn de to kjente punktene i funksjonsuttrykket, vil man få to likninger med to ukjente, som man så kan løse med hensyn på de to størrelsene a og b som det spørres etter. Riktig svar er $a = 5$ og $b = -3$. Elevene har fått kode 70 hvis de bare fant verdien $a = 5$, og kode 71 hvis de bare fant $b = -3$. I alle land i studien er det en relativt stor andel av elevene som finner den riktige verdien for a, men ikke verdien for b. Det er fordi elevene ser at funksjonen har et nullpunkt for $x = -1$, og da må $a = 5$ for at telleren skal bli 0. Vi tror at noen elever vil tenke på hvilke asymptoter denne funksjonen har når de skal finne a og b. De vet at vertikal asymptote finnes ved å sette nevneren lik 0, altså $x = -b$ og horisontal asymptote er $y = \frac{a}{1} = a$.

I Norge er brøkfunksjoner en del av læreplanen i 1T og R1, men ikke i R2. Likevel er det litt overraskende at det norske resultatet er såpass svakt, klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet. Norge og Sverige har begge et svakere resultat enn de landene vi sammenlikner med, og enda svakere framstår dette resultatet hvis man tar med i vurderingen at flere av landene har en langt høyere andel av årskullet med i studien. Portugal med godt over dobbelt så høy dekningsgrad som Norge presterer klart bedre, det samme gjør Slovenia med over tre ganger så høy dekningsgrad. Russland har tilnærmet samme dekningsgrad som Norge, men andelen som løser oppgaven, er nesten dobbelt så høy som i Norge.

Dette er et eksempel på en algebraoppgave som ikke er veldig komplisert, men som krever en viss elementær forståelse av algebra. Den krever også at elevene vet at de kan få fram to likninger med to ukjente ved å sette inn de to kjente punktene på grafen. Hvis de ikke ser det, er det vanskelig å vite om det er algebraen de ikke klarer, eller om det er mangel på evne til å utnytte opplysningene i oppgaven som er problemet. Hvilke land som presterer godt på oppgaven, samsvarer også med tidligere analyser som viser langt mer vekt på algebra i østeuropeiske land som Russland og Slovenia. Lav prioritering av algebra i norsk skole tas også opp og drøftes spesielt i kapittel 6 i denne boka.

Algebraoppgave 13
Knowing, Simplify log exponent using inverses

Skriv $10^{\log_{10} m}$ enklere, der $m > 0$.

Svar: ________________

MA33008	10 Rett svar	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	11	64	25
Sverige	18	51	31
USA	34	47	18
Russland	76	11	13
Slovenia	26	46	28
Frankrike	78	13	10
Portugal	57	23	19
Int. gj.snitt	39	36	25

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er oppgaven kategorisert på nivå å kunne; den tester om elevene har grunnleggende faktakunnskaper om logaritmer, som definisjon av logaritme og kunnskap om inverse funksjoner.

I denne oppgaven har man logaritmer med grunntall 10 (såkalt briggske logaritmer). En måte å definere logaritmen til et tall x med grunntall 10 på, er å si at det er den inverse funksjonen til 10^x, eller man kan definere logaritmen til et tall med grunntall 10 som det tallet 10 må opphøyes i for å få det opprinnelige tallet. I denne oppgaven skal grunntallet 10 opphøyes i logaritmen til m med grunntall 10. Det gitte uttrykket i oppgaven kan da forenkles til m, som er riktig svar på oppgaven.

Her skiller Norge seg ut ved å prestere svært svakt, svakere enn alle landene vi sammenlikner med, og langt under det internasjonale gjennomsnittet. Sverige gjør det også svakt, men ikke like svakt som Norge. Det svake resultatet tyder på manglende forståelse av logaritmer hos norske elever. Én mulig årsak er at de ikke kjenner definisjonen av logaritme godt nok. Det er også mulig at noen elever blir usikre fordi logaritmer med grunntall 10 i Norge vanligvis skrives som lg. Vi tror at symbolbruken kompliserer oppgaven for norske elever. Hvis det hadde stått $10^{\lg m}$, tror vi at langt flere norske elever hadde svart m. Norske elever er ikke vant til skrivemåten $\log_g a$, og de bruker nesten utelukkende briggske logaritmer og naturlige logaritmer med notasjon henholdsvis $\lg x$ og $\ln x$.

Elever i Frankrike, Russland og Portugal presterer godt på oppgaven. Én mulig årsak til de store ulikhetene mellom land som vi ser på denne oppgaven, kan være i hvilken grad man legger stor eller liten vekt på å jobbe med definisjoner og bruk av symboler, både når det gjelder logaritmer og mer generelt. Dette er en oppgave der en relativt stor andel ikke har svart på oppgaven, og det gjelder i alle land. I Norge er det 25 % som ikke har svart, det samme som internasjonalt gjennomsnitt for å ikke svare.

Algebraoppgave 14
Applying, Find a value of two functions' intersections

La a være en konstant ulik 0. Finn de to x-verdiene der grafene til $y = 10^6 ax$ og $y = \dfrac{x^2}{10^6}$ skjærer hverandre.

Svar: ______________________________

MA33121	20 Begge verdiene	10 Bare $x = 0$	11 Bare $x = 10^{12}a$	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	11	15	11	26	38
Sverige	9	10	10	34	37
USA	7	22	16	42	13
Russland	35	13	3	15	33
Slovenia	26	9	17	37	12
Frankrike	8	11	11	29	41
Portugal	13	12	15	28	32
Int. gj.snitt	20	12	12	27	29

Dette er en åpen oppgave. Oppgaven er kategorisert kognitivt som anvendelse. Elevene skal anvende sine algebraiske kunnskaper til å beregne x-verdiene for skjæringspunkter mellom grafene til to funksjoner.

For å få full uttelling på oppgaven måtte elevene finne begge de aktuelle x-verdiene, og de fikk da kode 20. Hvis de bare fikk én x-verdi riktig, fikk de enten kode 10 eller 11, avhengig av hvilken x-verdi de fant. Løsningen $x = 0$ framstår som den som er enklest å finne. Den kan, med noe innsikt i algebraiske likninger, løses bare ved å se på uttrykkene; man trenger strengt tatt ikke å gjøre noen utregning. Å finne den andre løsningen, $x = 10^{12}a$, krever at elevene har noe kunnskap om manipulering av algebraiske uttrykk og en viss forståelse av abstrakt algebra. Det ser imidlertid ut som om elevene fant det omtrent like vanskelig å finne disse løsningene. Vi tror at grunnen til dette kan være at elevene har delt på x, og glemt at de da mister løsningen $x = 0$. Det er et gjennomgående mønster både internasjonalt og i flere av landene at det er ganske jevnt hvor stor andel av elevene som får kode 10 og som får kode 11.

Siden elevene ikke ble bedt om å vise hvordan de fant fram til løsningene, har vi ikke informasjon om hvilken framgangsmåte de har brukt. Det er interessant å merke seg at i mange land er det en relativt stor andel som ikke har svart på oppgaven, i Frankrike, Norge og Sverige omtrent 40 %. Internasjonalt gjennomsnitt for å ikke svare er nesten 30 %.

Selv om oppgaven ikke framstår som veldig komplisert, falt den ut ganske vanskelig i de fleste landene. Det internasjonale gjennomsnittet for helt riktig svar var 20 %, mens én av fire elever internasjonalt fant én av de to løsningene. Norge, Sverige og USA presterer svakt på oppgaven, særlig når vi tar med i vurderingen at disse landene tester en relativt liten andel av sine årskull. Det landet som presterer best, er Russland. Slovenias prestasjon er også god, tatt i betraktning at de har med over 30 % av sitt årskull på dette nivået i matematikk.

Algebraoppgave 15
Applying, Compare car rental plans X and Y

To ulike planer for bilutleie er gitt i tabellen under.

Utleieplan	Startpris	Pris per kilometer
X	100 zed	0,07 zed
Y	250 zed	0,02 zed

A. Etter hvor mange kilometer blir Plan Y den billigste planen?

Vis arbeidet ditt.

B. Dersom en ekstra forsikringspremie på 100 zed legges til i begge planer, endrer dette antall kilometer som må kjøres før Plan Y blir billigst?

Forklar svaret ditt.

MA33240	20 Både A og B	10 Bare A	11 Bare B	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	39	22	3	19	17
Sverige	16	38	1	29	16
USA	35	22	5	31	7
Russland	30	10	6	22	32
Slovenia	28	8	11	33	20
Frankrike	52	9	6	17	16
Portugal	29	12	4	24	32
Int. gj.snitt	30	14	6	24	25

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som anvendelse av kunnskap; elevene forventes å bruke sine kunnskaper i algebra til å løse et problem presentert i en hverdagskontekst. I første del av oppgaven (del A) skal elevene vurdere to ulike tilbud for leie av bil og finne ut hvor mange kilometer man må kjøre før det ene tilbudet blir rimeligere enn det andre. Denne første delen kan løses ved å sette opp en likning eller ved å sette opp en ulikhet som man løser for å kunne sammenlikne de to tilbudene. Kravene til algebraisk manipulasjon for å finne riktig løsning er lik i begge tilfellene. Oppgaven kan også løses ved å tegne grafene for de to tilbudene, enten for hånd eller ved hjelp av en grafisk kalkulator, og se hvor de krysser hverandre. En riktig løsning gir svaret 3000 kilometer på del A.

I andre del av oppgaven (del B) skal elevene vurdere om det får noen betydning for svaret i del A hvis det legges til en fast ekstrakostnad i begge tilbudene. Det er det samme som å spørre om løsningen av den likningen eller ulikheten man eventuelt brukte i del A vil bli påvirket om man legger til samme tall på høyre og venstre side. Det riktige svaret på det er nei. Som fullgod begrunnelse var det tilstrekkelig at elevene svarte at det ikke hadde noen betydning for antall kilometer siden man la til samme faste kostnad i begge tilbudene.

Hvis elevene har svart riktig på spørsmålene i både del A og del B, får de kode 20. Har de kun del A rett, får de kode 10. Kode 11 er for de elevene som bare svarer rett på del B. Elever som bare får del B) rett, kan antas å ha en generell forståelse av hvilken betydning det har at man legger til et fast beløp på begge sider i en likning eller ulikhet, mens de mangler de kunnskapene de trenger for å sette opp en slik likning eller ulikhet i en kontekst som i denne oppgaven. De som bare har del A) riktig, vet hvordan de skal gå fram for å sette opp og løse en likning eller ulikhet i en slik kontekst, mens de mangler en generell forståelse av hva det innebærer å legge til det samme tallet på begge sider av en likning eller ulikhet.

Dette er en algebraoppgave hvor norske elever presterer bra sammenliknet med andre land i studien. Nesten 40 % av de norske elevene får full uttelling på oppgaven. Det er bare Frankrike som har en større andel elever med riktig svar, over 50 %. Dette er en oppgavetype som passer godt inn med hva norske elever er vant til å få. Også USA gjør det relativt godt på oppgaven, nesten like godt som Norge. Begge landene har omtrent samme dekningsgrad. Det er også ganske lik andel i begge land når det gjelder andelen som får enten bare første del eller bare andre del rett.

Det landet som utmerker seg med svakest prestasjonen, er Sverige. De har den laveste andelen elever med full uttelling på oppgaven, og den høyeste andelen elever som bare greier første del av oppgaven. Også i Norge er det en relativt stor andel elever, over 20 %, som bare greier første del. Norske elever presterer langt bedre enn de svenske elevene på denne oppgaven; nærmere 40 % av elevene i Sverige fikk bare til første del.

Algebraoppgave 16
Reasoning, Find a and b for equation given asymptotes

Grafen til funksjonen $f(x)=\dfrac{ax+5}{x+b}$ har asymptoter $x=-2$ og $y=7$.
Hva er verdiene til a og b?

Ⓐ $a=-2,\ b=7$

Ⓑ $a=-7,\ b=2$

Ⓒ $a=2,\ b=7$

Ⓓ $a=7,\ b=2$

MA33050	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	20	27	12	31	10
Sverige	13	30	18	29	11
USA	12	26	12	45	6
Russland	19	23	21	29	9
Slovenia	17	19	17	37	10
Frankrike	20	18	14	34	14
Portugal	15	12	13	53	7
Int. gj.snitt	17	20	15	38	11

Dette er en flervalgsoppgave i algebra som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal ved å bruke sine kunnskaper om asymptoter til brøkfunksjoner resonnere seg fram til hvordan de kan løse oppgaven. Elevene får oppgitt at den gitte funksjonen har en (vertikal) asymptote for $x = -2$ og en (horisontal) asymptote for $y = 7$. Den horisontale asymptoten kan man finne ved å se på grenseverdien for funksjonen når x går mot uendelig. Norske elever har dessuten lært at de kan ta tallet foran x i teller og dele med tallet foran x i nevner for å finne horisontal asymptote, uten at de nødvendigvis har noen forståelse av hvorfor det er riktig. Man vil da få at funksjonen går mot verdien a. Det betyr at $y = a$ er en horisontal asymptote, som det er oppgitt i oppgaven at er lik 7. Elevene skal vite at den vertikale asymptoten er gitt ved den x-verdien som gjør nevneren lik 0. Nevneren er 0 når $x = -b$. I oppgaven er det oppgitt at denne asymptoten er $x = -2$, med andre ord er $b = 2$. Det betyr at alternativ D) er det riktige svaret på oppgaven.

Elever i Norge og Sverige presterer ganske likt på denne oppgaven, og relativt svakt sammenliknet med de fleste andre landene. Portugal er landet med best prestasjon på oppgaven, særlig hvis man tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden der. Tar man dekningsgraden med i vurderingen av landenes prestasjoner, er de også relativt gode i Slovenia og Frankrike.

Dette er stoff som det i Norge arbeides mest systematisk med i 1T og R1. De relativt svake norske resultatene kan skyldes dårlig vedlikehold av tidligere innlært stoff, selv om man nå i større grad enn tidligere åpner for at elevene, også til eksamen, kan testes i stoff fra kurs på lavere trinn. Dette er særlig viktig i et hierarkisk fag som matematikk, hvor tidligere innlært stoff ofte har stor betydning for videre læring av nytt stoff.

Avsluttende kommentarer

Resultatene på oppgavene i algebra illustrerer at norske elever generelt presterer svakere i algebra enn elever i de fleste andre land.

På de tre oppgavene som var med i alle TIMSS Advanced-studiene, er det en jevn tilbakegang i prestasjoner for norske elever, først fra 1998 til 2008 og så fra 2008 til 2015. For de fire oppgavene som var med i TIMSS Advanced i 2008 og 2015, er bildet mer sammensatt. På to av oppgavene er det framgang i de norske elevenes prestasjoner, mens det ikke er noen endring på én oppgave, og tilbakegang på en annen oppgave. Hovedandelen av oppgaver var nye i TIMSS Advanced 2015. På de aller fleste av disse oppgavene var norske elevers prestasjoner svakere enn resultatene for elevene i de fleste andre landene. I ett land, Sverige, var tendensen at deres elever presterte enda svakere enn de norske elevene.

Resultatene på flere av oppgavene understøtter det som mange tidligere analyser har vist i mange ulike studier og på mange ulike nivåer i skolen. Land i Norden legger relativt liten vekt på å lære elevene algebra, mens det motsatte er tilfellet for land i Øst-Europa (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013; Grønmo et al., 2004; Olsen & Grønmo, 2006). (Se også kapittel 6 for mer om vektlegging av algebra i ulike land.)

Lite vekt på algebra er problematisk, spesielt fordi det er det matematiske språket som mange av elevene vil trenge for videre studier og yrker. Algebra innebærer også manipulering av symboler. Norske lærebøker og læreplaner tenderer til å «skåne» elevene for utstrakt bruk av symboler, både i algebra, i definisjoner og i matematiske tekster. Dette er å gjøre elevene en bjørnetjeneste når det gjelder å forberede dem til høyere utdanning i fag som krever matematikk. Det gjelder både realfag, økonomiske fag, helsefag, samfunnsfag og til og med humanistiske fag, der man av og til bruker kvantitativ analyse som verktøy. (Se også kapittel 12.)

KAPITTEL 9

Oppgaver i kalkulus fra TIMSS Advanced 2015

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Siren Røst Veflingstad
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Tor Espen Hagen
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet kalkulus i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapitlet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og for «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

Norge	10,6 %	18,7 år
Sverige	14,1 %	18,7 år
USA	11,4 %	18,1 år
Russland	10,1 %	17,7 år
Slovenia	34,4 %	18,8 år
Frankrike	21,5 %	18,0 år
Portugal	28,5 %	18,1 år

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i kalkulus, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

Kalkulusoppgave 1
Knowing, Derivative of exponential function

Funksjonen f er definert ved $f(x)=e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

Ⓐ e^{x^2}

Ⓑ e^{2x}

Ⓒ $2xe^{x^2}$

Ⓓ $e^{x^2}+2x$

Ⓔ $2e^{2x^3}$

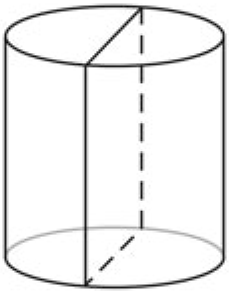
MA13015		A	B	C*	D	E	Ikke svart
Norge	1998	8	13	66	10	1	2
	2008	11	17	57	10	3	2
	2015	7	8	73	7	1	4
Sverige		16	15	48	10	5	6
USA		7	10	71	8	2	2
Russland		12	14	62	10	2	1
Slovenia		18	13	44	20	4	1
Frankrike		6	9	80	2	2	2
Portugal		6	14	65	7	3	5
Int. gj.snitt		9	11	66	8	3	4

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som det å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste om elevene vet hvordan de skal bruke kjerneregelen for å derivere en eksponentialfunksjon. Det var en klar tilbakegang fra 1998 til 2008 i de norske elevenes prestasjoner på denne oppgaven, mens det er en vel så stor framgang i prestasjoner fra 2008 til 2015. De norske elevenes prestasjoner i 2015 er litt over det de presterte i 1998, og nesten på topp sammenliknet med andre land. Det er bare Frankrike som har en større andel som svarer riktig på oppgaven.

Oppgaven har en relativt høy løsningsfrekvens i de fleste landene. Sverige og Slovenia er de to landene som presterer svakest. Tar vi Slovenias høye dekningsgrad med i vurderingen, hvor godt over 30 % av årskullet tar matematikk til topps, er det Sverige som kommer svakest ut.

Det er flere mulige årsaker til den positive utviklingen i norske elevers prestasjoner fra 2008 til 2015. Derivasjon og derivasjonsregler er sentralt stoff i R1. Det videreføres i R2 med derivasjon av trigonometriske funksjoner og sammensatte funksjoner. Elevene studerer dempede og udempede svingefenomener og får bruk for både integrasjon og derivasjon i forbindelse med løsning av differensiallikninger. En mulig årsak til de bedre resultatene hos norske elever kan være at både første og andre ordens differensiallikninger har en stor plass i læreplanen i R2. For å løse slike likninger må elevene være fortrolige med både derivasjon og integrasjon. Differensiallikninger krever spesielt kunnskap om derivasjon av eksponentialfunksjoner og kjerneregelen (integrerende faktor), nettopp det de trenger for å løse denne oppgaven.

Kalkulusoppgave 2
Applying, Cylinder radius with max volume



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

(A) 2,5 m

(B) 2 m

(C) 1,5 m

(D) 1 m

(E) 0,5 m

MA13016		A	B	C	D*	E	Ikke svart
Norge	1998	11	16	12	34	22	4
	2008	10	18	13	34	21	3
	2015	10	19	16	28	19	9
Sverige		10	20	15	31	13	10
USA		10	15	20	31	21	3
Russland		8	14	14	45	15	3
Slovenia		9	14	15	35	20	6
Frankrike		13	22	17	25	14	10
Portugal		7	12	15	28	29	9
Int. gj.snitt		10	16	16	30	18	10

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som anvendelse. Oppgaven skal teste hvor gode elevene er til å anvende kunnskaper om funksjoner og optimalisering til å lage en matematisk modell som de kan bruke til å finne det maksimale volumet av sylinderen. Oppgaven kan løses ved å sette opp et funksjonsuttrykk for volumet uttrykt ved radius og høyde i sylinderen. Man kan så bruke høyde og radius i sylinderen til å sette opp et uttrykk for omkretsen av snittflata, $O = 4r + 2h$, som det er oppgitt skal være 6 m. Da kan $h = 3 - 2r$ settes inn i funksjonsuttrykket for volumet, som blir $V(r) = \pi r^2(3 - 2r) = \pi(3r^2 - 2r^3)$. Dette funksjonsuttrykket kan man derivere med hensyn på radius. Så settes uttrykket for den deriverte lik 0 for å finne verdier for radius som kan gi maksimum eller minimum volum av sylinderen. Med korrekte utregninger får man at radius lik 1 m gir sylinderen maksimalt volum.

Dette er en relativt komplisert oppgave, som må løses i flere trinn. De elevene som løser oppgaven riktig, viser kompetanse på et høyt nivå. Oppgaven faller vanskelig i de fleste landene, med en løsningsfrekvens rundt 30 %, unntatt i Russland hvor det er 45 % som svarer rett. Resultatet for norske elever var stabilt fra 1998 til 2008, mens vi ser noe tilbakegang i 2015. En mulig årsak til denne tilbakegangen er at modellering var mer i fokus i den læreplanen elevene hadde i 2008 enn i den elevene nå arbeider etter. En annen mulig årsak kan være at optimalisering er mer sentralt i R1 og S1 enn i R2, men vi har sett framgang på andre oppgaver med stoff som elevene arbeider mest med i R1. Det er derfor lite trolig at det er den viktigste årsaken til tilbakegangen.

Feilsvarene er relativt jevnt fordelt, både i Norge og i de andre landene. Det er derfor vanskelig å peke på en typisk misoppfatning hos elevene. Noen elever som har greid å løse oppgaven riktig, kan likevel ha valgt alternativ B fordi de har tenkt diameter i stedet for radius. Svaralternativ A, B, og C kan man utelukke ved et logisk resonnement, siden summen av diametrene i disse alternativene blir større eller lik den oppgitte omkretsen på 6 m. Det kan allikevel tenkes at noen av de som har svart alternativ C, altså 1,5 m, har tenkt at rektangler har størst areal hvis de er kvadrater, og at de har tenkt diameter istedenfor radius.

Kalkulusoppgave 3
Knowing, Second derivative of function given

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Kva er $f''(x)$?

MA23154		20 Helt riktig	10 Bare $f'(x)$	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	2008	21	9	62	8
	2015	42	13	41	4
Sverige		43	13	38	7
USA		52	11	34	3
Russland		43	4	32	20
Slovenia		34	13	46	7
Frankrike		33	12	51	4
Portugal		39	20	36	5
Int. gj.snitt		43	13	37	7

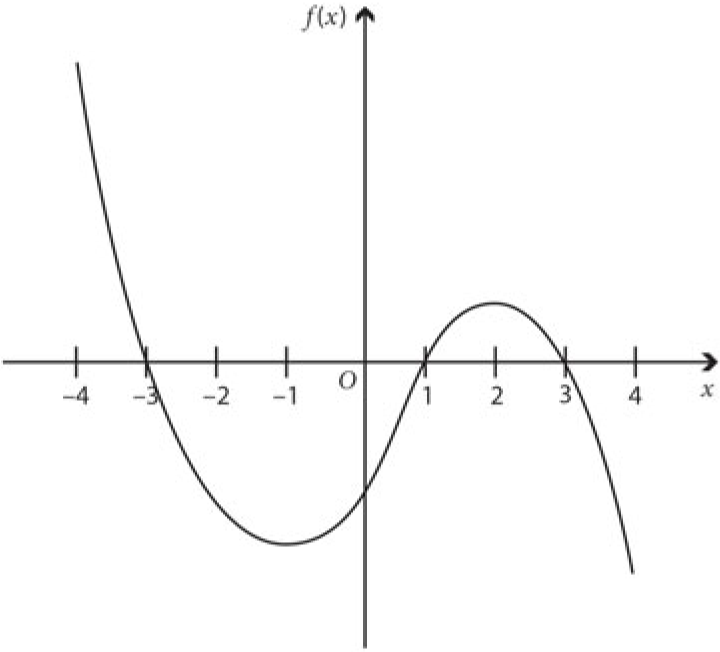
Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene greier å finne den dobbeltderiverte av en gitt funksjon. Riktig svar på oppgaven gir elevene kode 20, mens de som har funnet den første deriverte, men ikke den andrederiverte, har fått kode 10. Det riktige svaret er $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$ (eller et ekvivalent uttrykk).

Det er en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner på denne oppgaven fra 2008, med en dobbelt så stor andel av elevene som får den til i 2015. Dette resultatet samsvarer med hva vi har sett på andre oppgaver i derivasjon; norske elever har blitt markant bedre på dette området. To mulige grunner til denne framgangen peker seg ut. Den ene er at derivasjon er stoff elevene jobber med i både R1 og R2. I 2008 var det ikke vanlig å teste elevene på prøver og til eksamen på stoff fra lavere trinn, mens det har blitt gjort i langt større grad senere. Det ser ut til å ha ført til at man i skolen nå legger mer vekt på vedlikehold og videreutvikling av ferdigheter, som for eksempel derivasjon, som testes i denne oppgaven. I et fag som matematikk er det viktig med vedlikehold av tidligere innlært kunnskap, siden faget er hierarkisk bygget opp, ny kunnskap skal bygge på det du kan fra før. I norsk læreplan er derivasjon sentralt i R1, mens både derivasjon og integrasjon er sentralt i R2. Samtidig er det en forutsetning for å lære integrasjon som antiderivasjon at man behersker derivasjon. Vedlikehold av kunnskaper fra lavere trinn er derfor essensielt i matematikk, mer enn i mange andre fag.

En annen grunn til den tydelige framgangen man har sett hos norske elever når det gjelder derivasjon, kan knyttes til en viktig endring i læreplanen for R2 etter 2008, ved at differensiallikninger ble tatt inn i læreplanen. Arbeid med differensiallikninger forutsetter at elevene har gode ferdigheter i og forståelse av både derivasjon og integrasjon. Hvis de ikke har fått det helt med seg fra R1, får de masse trening og befesting av denne kunnskapen i løpet av R2. Det er derfor interessant at vi ser en systematisk framgang hos norske elever når det gjelder derivasjon, slik som i denne oppgaven.

Norge, Sverige og Russland ligger omtrent på det internasjonale gjennomsnittet for rett svar, og USA et stykke over dette snittet. Det er en mindre andel av elevene i Frankrike og Slovenia som får til denne oppgaven, men her må man huske at de har en langt høyere dekningsgrad enn vårt land. Det norske resultatet er uansett positivt, og ikke minst er det interessant å se at endringer i læreplan og hva som vektlegges til eksamen, ser ut til å bidra til at elevene får bedre kunnskaper på sentrale fagområder som de vil trenge i mange videre utdanninger og yrker.

Kalkulusoppgave 4
Reasoning, Sign of derivative function



Studer grafen til funksjonen f som er vist ovanfor. Kva for eit diagram viser rett forteikn for den deriverte funksjonen $f'(x)$?

(A)
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ ++++++0−−−−−−−−−−−−−−0++++++++0−−−−−

(B)
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ ++++++++++++++++++++0−−−−−−−−−−−−−

(C)
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ +++++++++++++++0−−−−−−−−−−0++++++++++

(D)
x: −3 −2 −1 0 1 2 3
$f'(x)$ −−−−−−−−−−−−−0++++++++++++0−−−−−−−−−

MA23206		A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	2008	28	8	8	53	2
	2015	15	4	6	73	2
Sverige		12	6	9	71	3
USA		17	6	7	65	5
Russland		21	2	7	69	2
Slovenia		37	5	12	43	4
Frankrike		27	1	3	67	2
Portugal		20	1	8	70	2
Int. gj.snitt		23	3	7	64	3

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal ved å se på grafen til f resonnere seg fram til fortegnet til den deriverte funksjonen. Funksjonen er synkende fram til -1, det gir negativt fortegn på den deriverte. Funksjonen er stigende derfra til $+2$, det vil si at den deriverte er positiv. Etter det er funksjonen synkende, da er den deriverte igjen negativ. Det betyr at det er alternativ D som gir det riktige svaret.

Det norske resultatet på denne oppgaven er veldig bra, bedre enn alle de landene vi sammenlikner med. Det er også en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner fra 2008 til 2015. Det legges stor vekt på å forstå sammenhengen mellom grafen til funksjonen og grafen til den førstederiverte både i lærebøkene og på eksamen i Norge. Det legges også vekt på sammenhengen mellom fortegnsskjema og graf. Andelen elever som løser oppgaven, er 20 prosentpoeng høyere i 2015 enn i 2008. Det er flere mulige årsaker til denne framgangen. I de reviderte læreplanene er koblingen mot fysikk blitt tydeligere, for eksempel ved å knytte derivasjon til fysiske begreper som fart og akselerasjon, og det kan ha bidratt til å styrke forståelsen for den deriverte og den dobbeltderiverte. Her kan også bruk av graftegner ha en positiv virkning, siden elevene raskt kan tegne inn grafene til en funksjon og den deriverte funksjonen i samme koordinatsystem, og diskutere sammenhenger mellom dem.

Igjen bekreftes det at norske elever gjør det bedre i 2015 enn i 2008 på området derivasjon. Fortsatt jobber elevene mer med derivasjon i R1 enn i R2, men både mer aksept etter 2008 for å teste elevene i stoff fra lavere trinn, og mer vekt på vedlikehold av tidligere innlærte ferdigheter, kan ha bidratt til den positive utviklingen vi ser i flere oppgaver. Det kan også ha hatt en positiv effekt at differensiallikninger nå har blitt en del av læreplanen i R2, noe som forutsetter at elevene har god forståelse av både derivasjon og integrasjon.

Portugal og Frankrike har også gode resultater på denne oppgaven, særlig når vi tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden i disse landene.

Kalkulusoppgave 5
Applying, Units of commodity to max profit

Ei bedrift produserer x einingar av ei vare kvar dag. Kostnadene i zed ved produksjon av x einingar er gitt ved $K(x) = 0{,}45x^2 + 40x + 2000$. Vara blir seld for 220 zed per eining. Kor mange einingar må produserast og seljast dagleg for å gi maksimalt overskot?

Vis framgangsmåten.

MA23166		10 Riktig løsning	11 Riktig løsning med kalkulator	70 Riktig metode, men regnefeil	72 Bruk av kalkulator, men feil løsning	79 Andre feil	Ikke svart
Norge	2008	7	4	1	**8**	44	36
	2015	10	1	2	**3**	45	39
Sverige		11	2	1	**2**	59	26
USA		12	4	7	**9**	55	13
Russland		12	0	0	**0**	34	53
Slovenia		5	0	0	**0**	68	27
Frankrike		8	2	1	**4**	52	33
Portugal		5	2	1	**1**	61	30
Int. gj.snitt		8	1	1	**2**	51	36

Dette er en åpen kalkulusoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse. Oppgaven var vanskelig for elever i alle land, og det internasjonale gjennomsnittet for rett svar er under 10 %. Elevene må først skjønne at inntekten er $220x$, for deretter å sette opp et funksjonsuttrykk for overskuddet, $O = 220x - (0{,}045x^2 + 40x + 2000)$, basert på opplysningene i teksten. Denne funksjonen kan så deriveres, før den deriverte settes lik 0 for å finne maksimumsverdien som er 200 enheter. På denne oppgaven skulle elevene vise framgangsmåten, og vi har derfor noe informasjon om hvordan de løste den.

Elevene fikk kode 10 hvis svar og framgangsmåte var riktig, mens kode 11 var for de som hadde brukt kalkulator til utregningene med en akseptabel beskrivelse av hvordan den var brukt. Kode 70 var for elever som hadde brukt en riktig metode, men med en regnefeil. Kode 72 var for de som hadde brukt kalkulator, men ikke hadde en tilfredsstillende forklaring på bruken, eller at svaret de ga var feil. Som det framgår av tabellen, var det få av de som fikk rett på oppgaven, som hadde brukt kalkulator, mens det var en litt større andel av de som gjorde en feil i løsningen av oppgaven, som hadde brukt kalkulator.

USA presterte best med 16 % som løste oppgaven. Norge ligger litt over det internasjonale gjennomsnittet, og har en litt høyere prosent rett i 2015 enn i 2008. Men her må vi ta forbehold om at verdiene gjennomgående er så lave at det er vanskelig å trekke noen sikre konklusjoner. I alle land er det en betydelig andel av elevene som ikke har svart på oppgaven, i Norge nærmere 40 %.

Som for kalkulusoppgave 2 er det antakelig modelleringsdelen elevene finner problematisk. Dette er en typisk modelleringsoppgave som det arbeides med i S1 og S2, men ikke i R-kursene. Vi ser at elevene har problemer med begge disse oppgavene. Det å tenke i flere trinn er også noe som vanligvis er krevende. De må her selv finne ut hvordan de skal uttrykke inntektsfunksjonen og som neste trinn overskuddsfunksjonen. I begge disse oppgavene ser vi at norske elever sliter vel så mye som elever i en del andre land.

Kalkulusoppgave 6
Applying, Area enclosed by graphs of functions

Kor stort er arealet som er avgrensa av grafane til funksjonane $y = x^2$ og $y = 5x - 4$?

Vis framgangsmåten.

MA23043		20 Helt riktig	21 Riktig med kalkulator	10 Riktig metode, men regnefeil	79 Feil løsning	Ikke svart
Norge	2008	7	13	6	28	46
	2015	16	4	10	31	38
Sverige		16	6	7	39	32
USA		24	14	15	36	11
Russland		16	0	5	34	45
Slovenia		15	0	17	55	13
Frankrike		5	2	4	40	47
Portugal		0	1	0	48	52
Int. gj.snitt		13	3	9	40	35

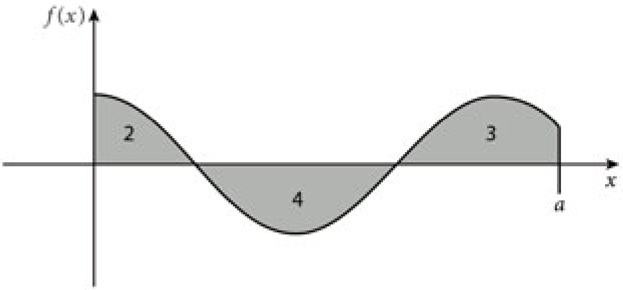
Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Elevene skal beregne arealet som er avgrenset av grafene til de to funksjonene som er oppgitt i oppgaven. Elevene må finne koordinatene til skjæringspunktene $(1, 1)$ og $(4, 16)$ mellom grafene og avgjøre at funksjonen $y = 5x - 4$ har størst funksjonsverdier i integrasjonsområdet. Det riktige svaret får man så ved å finne det bestemte integralet for differansen mellom de to funksjonene fra $x = 1$ til $x = 4$, altså $\int_1^4 (5 - 4x - x^2)\,dx$. Riktig utregning gir $\frac{9}{2}$, som gir kode 20 eller 21. Kode 21 er for de elevene som har brukt kalkulator i utregningene, og som har en akseptabel forklaring på hvordan de har brukt den. Hvis elevene har gjort en feil i utregningene, men har brukt riktig metode, får de kode 10.

Oppgaven faller vanskelig i alle land. Det internasjonale gjennomsnittet for elever som får kode 20 eller 21, er 16 %. Flertrinnsoppgaver, som dette er et eksempel på, er ofte vanskelige for elever. Det norske resultatet på oppgaven er i overkant av det internasjonale gjennomsnittet. Det eneste landet som presterer klart bedre enn Norge er USA, her er det også relativt mange elever som bruker kalkulator for å løse den.

Det er ingen endring fra 2008 til 2015 i andel norske elever som har helt riktig på oppgaven, men det er en større andel som løser den uten bruk av kalkulator i 2015 enn i 2008. Det er det få elever som bruker grafisk kalkulator i 2015. De er vant til å bruke PC sammen med en enkel kalkulator. Dette er en oppgavetype som er en sentral del av pensum i R2, og man kunne derfor kanskje ha ventet et bedre resultat i Norge. Det er sentralt i R2 å beregne areal mellom grafene til to funksjoner, men elevene er vant til å få tegnet grafene, eller bli bedt om å tegne dem og finne skjæringspunktene mellom dem, før de beregner arealet. Norske elever er vant til å få oppgavene delt opp i små deler, og er lite flinke til å planlegge løsing av oppgaver som krever flere trinn. Mer variasjon i oppgavetyper og øvelse i å løse oppgaver som krever flere trinn mot et endelig svar, kan være én måte å fordype elevenes kunnskaper på. Det kan være at man i skolen i litt for stor grad gir oppgaver som likner så mye på hverandre at elevene stopper opp ved mindre endringer i problemformuleringen. Elevene bør også få trening i mer sammensatte oppgaver, der de må tenke flere trinn av gangen og planlegge løsingen før de går i gang.

Kalkulusoppgave 7
Knowing, Use shaded graph to determine integral

Grafen til en funksjon f er vist her. Arealene til tre områder er oppgitt.



Hva er verdien til $\int_0^a f(x)dx$?

Ⓐ -4

Ⓑ 1

Ⓒ 5

Ⓓ 9

MA33076	A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	2	58	6	34	1
Sverige	3	63	9	23	2
USA	2	65	7	23	3
Russland	7	37	11	41	4
Slovenia	2	41	12	39	7
Frankrike	1	53	7	38	2
Portugal	6	22	22	19	32
Int. gj.snitt	3	48	10	31	8

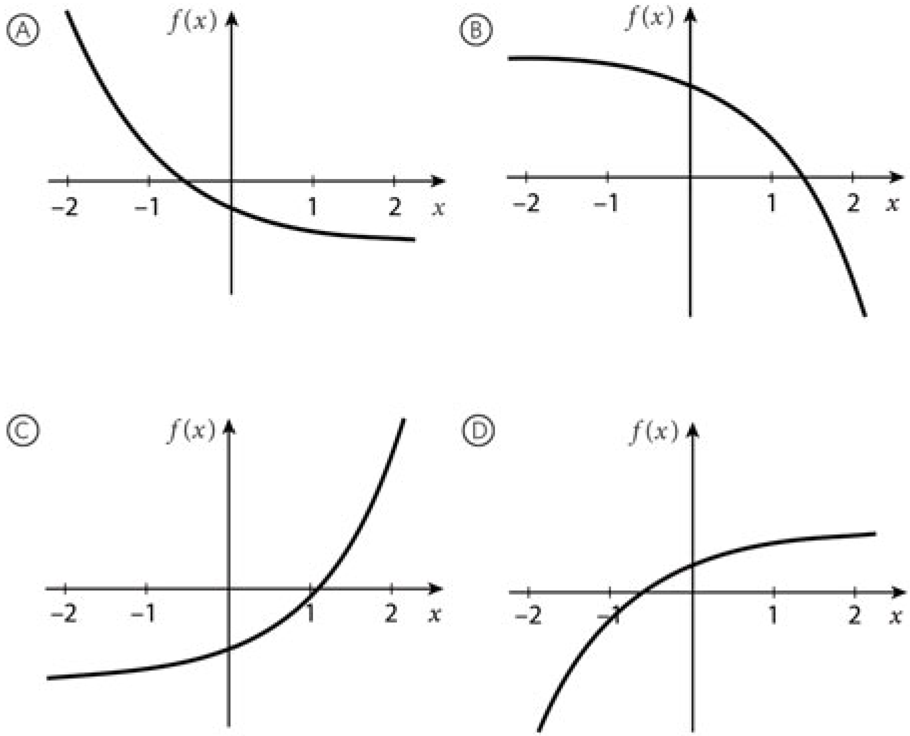
Dette er en flervalgsopppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene vet forskjellen mellom to begreper: på den ene siden arealet mellom en funksjonsgraf og x-aksen mellom to x-verdier, og på den andre siden det bestemte integralet av funksjonen mellom de samme x-verdiene. Elevene får oppgitt verdiene til tre arealer mellom en graf og x-aksen, to arealer over x-aksen og ett under x-aksen. De skal så bruke dette til å beregne det bestemte integralet for funksjonen mellom de to x-verdiene. De må vite at det bestemte integralet er arealet over x-aksen minus arealet under x-aksen, det vil si $(2+3)-4$, som gir at det riktige svaret til det bestemte integralet er lik 1, altså alternativ B.

Norge, Sverige og USA presterer bra på denne oppgaven, klart over det internasjonale gjennomsnittet. Også Frankrike har relativt gode prestasjoner på oppgaven, særlig gjelder det hvis vi tar med i vurderingen at de har en dekningsgrad som er klart høyere enn i de tre nevnte landene. Portugal og Russland har relativt svake prestasjoner.

Det er bra at norske elever gjør det så godt i en internasjonal sammenlikning. Men med tanke på at dette stoffet er en sentral del av R2-pensumet, og at selve oppgavetypen bør være kjent både fra undervisningen i faget og til eksamen, kunne man kanskje ha ventet et enda bedre resultat. Det vanligste feilsvaret i Norge, som i andre land, er alternativ D. Dette feilsvaret indikerer at elevene har en misoppfatning om at areal mellom x-akse og graf er det samme som bestemt integral for funksjonen. Vi vet ikke om det skyldes at de ikke vet at det er en forskjell mellom bestemt integral og areal, eller om det skyldes at de ikke reflekterer over denne forskjellen når den kommer på denne måten i en oppgave.

Kalkulusoppgave 8
Reasoning, Find graph with first and second derivative

Hvilken graf passer med at $f'(x)>0$ og $f''(x)<0$ for alle reelle tall x ?



MA33140	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	11	15	27	44	3
Sverige	9	14	31	42	4
USA	9	12	22	55	3
Russland	7	14	32	44	4
Slovenia	–	–	–	–	–
Frankrike	7	14	31	41	8
Portugal	6	12	16	63	3
Int. gj.snitt	7	13	26	48	5

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som resonnering. Elevene skal for det første resonnere seg fram til hvilke av de gitte grafene som passer med at den førstederiverte er større enn null, det vil si at $f(x)$ er strengt voksende. Svaralternativene C og D oppfyller begge dette kravet. Elevene må videre vite at når den dobbeltderiverte av en funksjon er mindre enn null, betyr det at grafen vender sin hule side ned (konkav). Det betyr at det riktige svaralternativet for denne oppgaven er D.

I alle landene svarer hovedtyngden av elevene enten C eller D. Det indikerer at majoriteten av elevene vet at $f'(x) > 0$ innebærer at grafen er strengt voksende. I Norge velger vel 70 % av elevene et av disse to alternativene. Det ser ut til at de fleste elevene har en god forståelse av at den første deriverte beskriver om grafen er stigende eller synkende. Derimot er det en del som ikke har forstått hva det betyr at $f''(x) < 0$. Sammenhengen mellom grafen til funksjonen og den andrederiverte er mer uklar enn sammenhengen mellom grafen til funksjonen og den førstederiverte. Vi ser det samme mønsteret i de fleste andre landene. Det landet som skiller seg positivt ut er Portugal, med høyest andel som velger riktig svaralternativ, og med en liten andel elever som velger alternativ C.

Kalkulusoppgave 9
Applying, Rational function limit of leading coefficient

Finn $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - a}{ax^2 + 2x}$, der $a \neq 0$.

Ⓐ $\dfrac{1}{a}$

Ⓑ $-\dfrac{a}{a+2}$

Ⓒ ∞

Ⓓ 0

MA33007	A*	B	C	D	Ikke svart
Norge	37	29	11	16	6
Sverige	27	23	21	25	5
USA	56	16	16	10	2
Russland	48	23	12	10	7
Slovenia	50	18	16	11	6
Frankrike	46	8	21	22	4
Portugal	62	8	12	15	4
Int. gj.snitt	54	15	14	13	4

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus hvor elevene skal anvende kunnskaper om grenseverdier for å finne hvilken verdi uttrykket går mot når x går mot uendelig. Oppgaven kan løses ved å dele både teller og nevner på x^2 før man lar x gå mot uendelig. Man vil da se at det riktige svaret er alternativ A.

Norge og Sverige er de to landene som presterer svakest på denne oppgaven, Sverige aller svakest. I Norge er grenseverdier med i læreplanen i både R1 og R2, men begrepet introduseres primært som et verktøy for å finne asymptoter, for å kunne definere derivasjon og integrasjon, og for å avgjøre konvergens av geometriske rekker. Det arbeides ikke så mye med å få elevene til å forstå selve begrepet grenseverdi, noe det svake resultatet på denne oppgaven gir indikasjoner på. Begrepene kontinuitet og grenseverdi er stemoderlig behandlet i norske lærebøker og blir nok tatt lett på i undervisningen.

Alle de andre landene har klart bedre resultater enn Sverige og Norge. Best er resultatene for Portugal med 62 % av elevene som svarer rett, mot bare 37 % i Norge og 27 % i Sverige. Tar man med i vurderingen at Portugal har over dobbelt så høy dekningsgrad som Norge og Sverige, framstår det gode resultatet for de portugisiske elevene som enda bedre.

Kalkulusoppgave 10
Reasoning, Explain continuity of points of piecewise function

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

Begrunn svaret.

MA33214	10 Rett svar	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	8	48	45
Sverige	9	51	41
USA	21	72	8
Russland	13	43	45
Slovenia	21	56	23
Frankrike	21	47	32
Portugal	46	46	8
Int. gj.snitt	22	49	30

Dette er en åpen oppgave i kalkulus. Den er kognitivt kategorisert som resonnering. For å få riktig på oppgaven må elevene både svare rett på spørsmålet om den gitte funksjonen er kontinuerlig i $x = 1$, og gi en akseptabel begrunnelse for det.

Oppgaven kan løses ved å finne grenseverdien for $2x$ når x går mot 1. Man finner da at $2x \to 2$. Man har allerede fått oppgitt i oppgaven at $f(1) = 1$. Det betyr at f ikke kan være kontinuerlig i $x = 1$. En annen måte å begrunne det på er ved å tegne grafen til f. Da ser elevene at linja $2x$ ikke går gjennom punktet (1,1), så f er ikke kontinuerlig i $x = 1$.

Oppgaven viser seg å være relativt vanskelig i alle land, med et internasjonalt gjennomsnitt på like over 20 % for hvor mange som får den rett. Aller svakest er de norske og svenske elevenes prestasjoner, der under 10 % svarer riktig. 45 % av de norske elevene prøver seg ikke engang på oppgaven.

Dette kan skyldes at de er usikre på hva som ligger i begrepet kontinuerlig. (Jamfør rapporten fra TIMSS Advanced 2008 (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), som også rapporterte svake norske resultater på kontinuitet.) De dårlige resultatene kan også skyldes at elevene ikke klarer å tegne en skisse av grafen som illustrerer diskontinuitet.

Stoffet som elevene testes på i denne oppgaven, er noe de jobber mer med i R1 enn i R2. I R1 jobber elevene med å avgjøre om ulike funksjoner med delt forskrift er kontinuerlige eller ikke, men begrepene grenseverdi og kontinuitet blir ikke tatt opp på en grundig måte i lærebøkene. Resultatene fra TIMSS Advanced tyder på at elevene har en svak forståelse av disse begrepene. De har antakelig liten erfaring med funksjoner som *ikke* er kontinuerlige.

Det landet som presterer klart best på oppgaven, er Portugal, særlig hvis man tar med i vurderingen deres høye dekningsgrad. Det kan tyde på at spørsmål om kontinuitet av funksjoner er mer sentrale i deres pensum enn i de andre landene som er med i TIMSS Advanced.

Kalkulusoppgave 11
Knowing, Find exponential limit

Finn $\lim_{x \to \infty} 2^{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}$

Ⓐ -2

Ⓑ 0

Ⓒ $\frac{1}{4}$

Ⓓ 4

MA33046	A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	11	10	66	6	8
Sverige	16	12	58	6	8
USA	6	23	59	3	9
Russland	9	11	66	7	7
Slovenia	9	16	57	6	13
Frankrike	5	16	70	5	4
Portugal	5	9	79	3	4
Int. gj.snitt	6	23	59	3	9

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus kategorisert kognitivt som å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste om elevene har elementære kunnskaper om grenseverdier. For å løse oppgaven må man vite at en konstant delt på noe som går mot uendelig, går mot null. Man får da at grenseverdien blir 2^{-2}, som er det samme som $\frac{1}{4}$. Alternativ C er derfor riktig svar.

Oppgaven framstår som relativt lett i alle land, og de norske elevenes prestasjoner er litt bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. De to landene som presterer best, er Portugal og Frankrike; begge land har også høy dekningsgrad. Det er tydelig at dette er sentralt stoff for portugisiske og franske elever.

På andre oppgaver som tester elevenes kunnskaper om grenseverdier, er de norske prestasjonene svake, se for eksempel kalkulusoppgavene 9 og 10.

Kalkulusoppgave 12
Knowing, Derivative of sin^2 when argument is function

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

Ⓐ $2\sin(h(x))h'(x)$

Ⓑ $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

Ⓒ $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

Ⓓ $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

MA33162	A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	18	39	19	16	9
Sverige	21	40	14	15	10
USA	11	58	12	12	7
Russland	15	58	15	8	5
Slovenia	23	47	13	12	6
Frankrike	21	26	21	22	11
Portugal	17	36	26	12	10
Int. gj.snitt	17	46	16	13	8

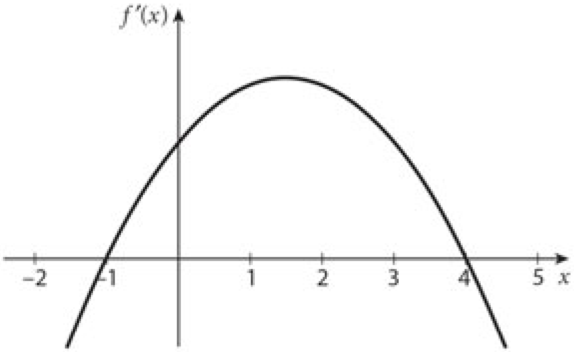
Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus kategorisert kognitivt som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene vet hvordan de skal bruke kjerneregelen når de skal derivere en funksjon. I kalkulusoppgave 1 viste norske elever at de har en grunnleggende forståelse av kjerneregelen, men i denne oppgaven er det noen kompliserende faktorer. Funksjonen de skal derivere, kan oppfattes som sammensatt av tre funksjoner. Siden sinus er i andre potens, må man først derivere denne med hensyn på sinusfunksjonen som kjerne og få $2\sin(h(x))$, så må man derivere denne kjernen, som gir $\cos(h(x))$, for til slutt å derivere den indre kjernen $h(x)$, som gir $h'(x)$. Disse tre uttrykkene skal multipliseres med hverandre slik det er gjort i alternativ B, som dermed er rett svar på oppgaven.

Det norske resultatet er her svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. USA og Russland presterer best. Et typisk trekk ved oppgaven er at det i alle land ser ut til å være en relativt jevn fordeling på feilsvar, det er ikke ett feilsvar som markerer seg som det de fleste elevene velger. Alle feilsvarene er konstruert slik at de starter riktig med den første derivasjonen, som gir $2\sin(h(x))$. Deretter er det en feil i det videre arbeidet som peker på at elevene roter med de siste derivasjonene. Et hovedproblem for de som ikke lykkes i å løse oppgaven, kan være er at de ikke har sett at det gitte funksjonsuttrykket må oppfattes som sammensatt av tre funksjoner, som $x \rightarrow h(x) \rightarrow \sin(h(x)) \rightarrow \sin^2(h(x))$. Det er også mulig at elevene har klart å identifisere at det er tre funksjoner, men ikke klart å bruke kjerneregelen korrekt. Sammensatte funksjoner er ikke et eget emne i norske læreplaner og lærebøker, og elevene ser dem egentlig bare i eksempler. Det er ikke vanlig å dele opp en sammensatt funksjon slik som $x \rightarrow h(x) \rightarrow \sin(h(x)) \rightarrow \sin^2(h(x))$. Omvendte funksjoner er heller ikke nevnt i lærebøker og læreplaner. Vi tror at vektlegging av disse begrepene vil lette elevenes forståelse av kjerneregelen.

Elevene må ha en relativt god forståelse av kjerneregelen for å løse oppgaven. Mange norske elever har antakelig ikke denne dybdeforståelsen. Dybdeforståelse henger ofte sammen med i hvilken grad det legges opp til å jobbe med lærestoffet over tid, slik at man får en modning hos elevene. Mangelen på dybdeforståelse hos elevene vi tester i videregående skole, kan ha sammenheng med at norske elever ikke har med seg den grunnleggende forståelsen av abstrakt matematikk fra grunnskolen. Dette kan ha medført at for mye tid i videregående skole går med til en del elementær læring som kunne ha kommet tidligere i skoleløpet. Flere av de resultatene vi presenterer i denne boka, peker på behovet for en grundig gjennomgang av progresjonen av lærestoffet i matematikk gjennom hele det norske skoleløpet. (Se kapittel 5 og 6.)

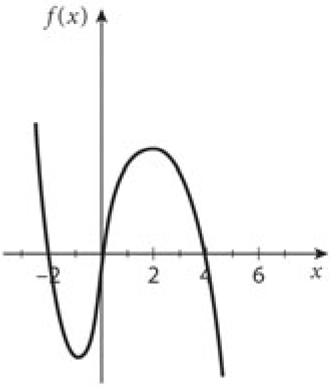
Kalkulusoppgave 13
Knowing, Discern function graph from derivative graph

Grafen til den førstederiverte av funksjonen f er vist under.

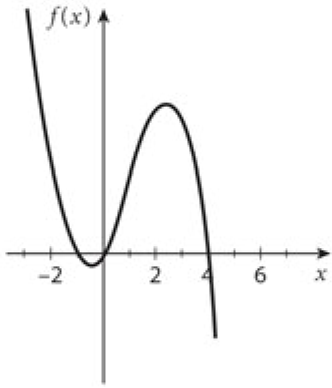


Hvilken graf ser ut til å passe best med f?

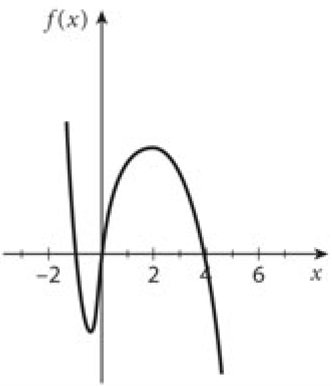
(A)



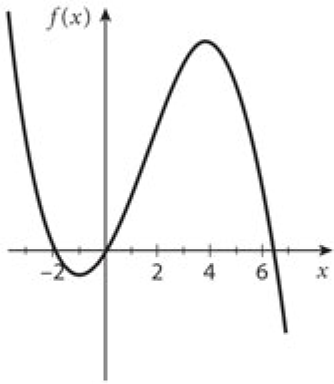
(B)



(C)



(D)



MA33163	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	11	21	9	53	7
Sverige	11	22	11	49	7
USA	9	21	7	58	5
Russland	8	17	14	58	4
Slovenia	13	31	17	34	5
Frankrike	9	23	13	50	5
Portugal	7	23	11	54	5
Int. gj.snitt	9	22	12	50	6

Dette er en flervalgsoppgave i kalkulus som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tester om elevene på basis av den gitte grafen til f' greier å bestemme hvilken av fire gitte grafer som kan være grafen til f. Fra grafen til den førstederiverte kan man se at f må ha ekstremalpunkter for $x = -1$ og $x = 4$, siden det er her den deriverte er lik 0 og skifter fortegn. Siden $f'(x)$ går fra negativ verdi til positiv verdi i $x = -1$, må det være et minimalpunkt for grafen, mens $x = 4$ må være et maksimalpunkt siden den deriverte går fra å være positiv til å bli negativ. Alternativ D er riktig svar på oppgaven; det er bare denne grafen som har minimum for $x = -1$ og maksimum for $x = 4$.

Alle grafene har samme «fasong», så oppgaven krever at elevene må se ganske grundig på de ulike grafene. Det vanligste feilsvaret i Norge (og gjennomgående i de andre landene) er alternativ B. Elevene ser ut til å tro at nullpunktene til f' og f er sammenfallende. Funksjonsdrøfting er en sentral del av det man arbeider med i R1. Det som testes i oppgaven er kjent stoff, både fra undervisning og på eksamen, men det gis oftere som en åpen oppgave der elevene selv skal skissere grafen. Det kan forekomme slike oppgaver i R2, men det vil da ofte følges av en oppgave knyttet til integrasjon og areal.

Det er relativt små variasjoner mellom landene i prestasjoner på denne oppgaven. Andelen som får riktig, ligger rundt 50 til 60 % i alle land unntatt Slovenia med 34 %. Tar man med at Slovenia har en langt høyere dekningsgrad enn de andre landene, framstår deres resultat noe bedre. Det er positivt at norske elever presterer i overkant av det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven.

Kalkulusoppgave 14
Reasoning, Find range of integral with variable upper bound

La a og b være reelle tall som tilfredsstiller $a > 2$ og $\int_1^a 2x\,dx = b$.
Hva er de mulige verdiene til b ?

Ⓐ $b \geq -1$

Ⓑ $b > 0$

Ⓒ $b > 2$

Ⓓ $b > 3$

MA33066	A	B	C	D*	Ikke svart
Norge	6	14	22	47	11
Sverige	8	19	24	38	11
USA	5	14	23	51	8
Russland	6	21	25	41	7
Slovenia	8	19	25	39	9
Frankrike	5	19	29	38	9
Portugal	11	20	25	11	34
Int. gj.snitt	7	17	23	40	14

Dette er en flervalgsoppgave hvor elevene skal resonnere seg fram til hvilke verdier b kan ha, gitt at a er større enn 2. En måte å løse oppgaven på er å beregne $\int_1^a 2xdx = a^2 - 1$. Ved å sette inn $a = 2$ får man at det bestemte integralet da er lik 3. I oppgaven står det at $a > 2$. Det vil si at verdien b av det bestemte integralet må oppfylle $b > 3$ (siden integranden er positiv) som gir at alternativ D er det riktige svaret. Utfordringen i oppgaven kan antas å være at man ikke kan gå rett fram og beregne det bestemte integralet, men må ta med i betraktning at a er en parameter. Det synes rimelig å anta at mange elever har greid å integrere og få uttrykket $a^2 - 1$, men så klarer de ikke å utnytte opplysningen om at $a > 2$ til å finne fram til det korrekte svaret.

Dette er en oppgave hvor norske elever gjør det relativt godt i en internasjonal sammenlikning, bedre enn alle de andre landene, bortsett fra USA som ligger litt over Norge. Svakere prestasjoner ser man i Sverige, Frankrike og Slovenia, mens Portugal er det landet som presterte aller svakest på oppgaven. I Portugal valgte 1/3 av elevene å ikke svare på oppgaven. I alle land var alternativ C det vanligste feilsvaret, mens færrest elever valgte feilsvaret A. Dette er en oppgave som er dekket av pensum i R2.

Avsluttende kommentarer

Det er positivt at norske R2-elevers prestasjoner i derivasjon framstår som relativt gode i et internasjonalt perspektiv, og ikke minst at det er en positiv utvikling i disse kunnskapene sammenliknet med resultatene i tidligere TIMSS Advanced-studier. Det har blitt pekt på mulige årsaker til denne norske framgangen i prestasjoner i kommentarene til flere av oppgavene, som for eksempel bedre vedlikehold av tidligere innlært stoff fra R1 fordi det nå i større grad testes på prøver og eksamener i R2. En annen viktig grunn det pekes på, er at differensiallikninger har kommet inn som læringsstoff i R2 etter 2008. Arbeid med differensiallikninger forutsetter at elevene har relativt gode kunnskaper om både derivasjon og integrasjon. Det er derfor rimelig å anta at derivasjon nå er et område hvor elevene både vedlikeholder tidligere kunnskaper og arbeider med stoffet på flere måter enn tidligere; dermed kan de utvikle en dypere forståelse. Vedlikehold av kunnskap, og modning over tid ved å arbeide med stoff fra ulike innfallsvinkler, er essensielt i et hierarkisk og abstrakt fag som matematikk. I kurset R2 er det ikke så mange emner som i tidligere matematikkurs, og emnene henger i stor grad sammen. Dette gjør at elevene mer enn tidligere får gå i dybden, kanskje med unntak av algebra. Vi ser at elevene kan løse ganske avanserte oppgaver i kalkulus, men at besvarelsene ofte inneholder algebraiske feil.

Når det gjelder forståelsen av sentrale begreper som grenseverdi og kontinuitet, er de norske prestasjonene ikke oppløftende. Det gis klare indikasjoner fra flere oppgaver på at norske elever ikke har en tilstrekkelig forståelse av disse begrepene. Én mulig årsak kan være at dette tas opp nokså kortfattet og kanskje overflatisk rett før man trenger det, uten at man går dypere inn i stoffet. Det gir elevene liten mulighet til modning og forståelse av stoffet. Funksjon, grenseverdi, kontinuitet og derivert er sentrale begreper som elevene trenger tid på å forstå ordentlig. De kommer egentlig innom disse begrepene helt fra ungdomstrinnet, men det legges for lite vekt på dybdelæring, som krever tid og grundighet.

Modning over tid er ofte nødvendig når det gjelder abstrakte begreper i matematikk. De problemene elevene har, kan også skyldes svake forkunnskaper fra grunnskolen (se kapittel 3 og 6 i denne boka). Hvis forkunnskapene er svake, kan det medføre at man i videregående skole bruker for mye tid på å lære elevene det de egentlig skulle ha lært tidligere. Dette står ikke i motsetning til hele tiden å passe på at tidligere innlært stoff repeteres. Det er stor forskjell på å repetere stoff og det å måtte gjennomføre den grunnleggende opplæringen.

KAPITTEL 10

Oppgaver i geometri fra TIMSS Advanced 2015

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet presenterer vi resultater for alle de frigitte oppgavene innen emneområdet geometri i TIMSS Advanced 2015 matematikk. Dette kapittelet er basert på et samarbeid mellom forskere ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt, begge ved Universitetet i Oslo, og realfagslærere ved Lillestrøm videregående skole i Akershus. Kommentarene til oppgavene og resultatene presentert i kapitlet er basert på drøftinger mellom alle disse personene. De som står som forfattere, er ansvarlige for utformingen av teksten.

I tabellen for hver oppgave har vi angitt det internasjonale nummeret som oppgaven har i TIMSS Advanced, og over oppgaven har vi angitt den kognitive kategoriseringen av oppgaven og en kort beskrivelse av hva oppgaven går ut på. Vi har valgt å beholde dette på engelsk; det er for at man lettere skal kunne finne fram til internasjonale publikasjoner hvor omtale av oppgaver inngår. Senere i teksten bruker vi norske betegnelser. De kognitive nivåene har vi oversatt på følgende måte: For den engelske betegnelsen «Knowing» bruker vi «Kunne», for «Applying» bruker vi «Anvende», og «Reasoning» bruker vi «Resonnere» (for mer om dette, se siste kapittel «Rammeverk og metoder»). Systemet som er brukt for å kode de oppgavene som ikke er flervalgsoppgaver, er også beskrevet i bokas siste kapittel.

TIMSS Advanced er en studie av elever i det siste året i videregående skole som har valgt full fordypning i matematikk. Hvor stor andel av et årskull i et land som har valgt slik fordypning, varierer ganske mye. I sammenlikninger mellom land er det viktig å ta hensyn til dette, da det sier mye om hvor mange prosent av elevene i landet som når opp til et visst nivå, generelt og på enkeltoppgaver. Det er også noe variasjon mellom land når det gjelder alderen på elevene. Andelen av årskullet som testes, det som kalles landets *dekningsgrad*, og gjennomsnittsalderen på elevene i de landene vi sammenlikner med, er (se kapittel 3):

Norge	10,6 %	18,7 år
Sverige	14,1 %	18,7 år
USA	11,4 %	18,1 år
Russland	10,1 %	17,7 år
Slovenia	34,4 %	18,8 år
Frankrike	21,5 %	18,0 år
Portugal	28,5 %	18,1 år

Til slutt i kapitlet, etter gjennomgangen av alle oppgavene i geometri, har vi en kort oppsummering av noen viktige fellestrekk under tittelen «Avsluttende kommentarer». Disse kommentarene danner utgangspunkt for videre drøftinger og refleksjoner i det oppsummerende kapittel 13, som tar for seg sentrale funn som er presentert i de ulike kapitlene i boka.

De formlene som er oppgitt i heftene som elevene får, er gjengitt i et appendiks sist i boka.

Geometrioppgave 1
Applying, Equation of perpendicular line

Kva for ei av desse linjene er vinkelrett på linja $\mathbf{6x+2y=4}$ og går gjennom punktet $(-6, 5)$?

Ⓐ $3x - y = -23$

Ⓑ $3x - 7 = 13$

Ⓒ $3x - 9y = 9$

Ⓓ $x - 3y = -7$

Ⓔ $x - 3y = -21$

MA13017		A	B	C	D	E*	Ikke svart
Norge	1998	22	9	12	12	31	14
	2008	27	10	14	13	23	14
	2015	26	10	17	11	23	15
Sverige		27	11	19	13	19	12
USA		22	5	12	10	50	3
Russland		27	7	12	9	37	9
Slovenia		18	7	12	11	47	7
Frankrike		25	8	12	10	26	19
Portugal		27	6	12	11	36	10
Int. gj.snitt		22	5	12	10	37	3

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å bruke at retningsvektoren til en rett linje gitt på formen $ax + by = c$ der a, b, og c er reelle tall, er vektoren $[b, -a]$. Ved å bruke at to linjer står vinkelrett på hverandre når skalarproduktet av retningsvektorene til linjene er lik 0, kan man utelukke alternativene A og B. (Når b er lik 0, som i alternativ B, er for øvrig linja vertikal.) Ved å sette inn koordinatene $(-6, 5)$ i de øvrige alternativene, får man at dette punktet kun ligger på linja i alternativ E, som gir det riktige svaret.

Norske elever er neppe vant til å arbeide med rette linjer gitt på formen $ax + by = c$. Dette er heller ikke vanlig i norske lærebøker. Elever er mest vant til å bruke likningsframstillingen $y = ax + b$, og man kan derfor anta at en del norske elever vil skrive om uttrykkene til denne formen. De vil da kunne se at svaralternativene C, D og E har det rette stigningstallet. Når noen velger C eller D kan det eventuelt skyldes en regnefeil. Det vanligste feilsvaret i Norge, som i andre land, er alternativ A. En mulig årsak til at elevene velger dette alternativet er at de tror sammenhengen mellom stigningstallene til vinkelrette linjer kun innebærer motsatt fortegn.

Oppgaven kan også løses ved å tegne grafene.

Det er bare 23 % av de norske elevene som svarer riktig i 2015, det samme som i 2008. I den første TIMSS Advanced-studien som Norge gjennomførte i 1998, var det over 30 % som svarte riktig på oppgaven. Måten oppgaven er presentert på, er nok noe fremmed for norske elever. De er mer vant til å løse denne type oppgaver ved bruk av vektorregning, med linjer presentert som parameterframstilling med retningsvektorer, hvor de skal vite at to vektorer står normalt på hverandre når skalarproduktet er lik null. Hadde oppgaven blitt presentert som en vektoroppgave eller med linjer skrevet på parameterframstilling, ville nok flere norske elever svart riktig.

Det er en grunnleggende egenskap ved matematikk at et gitt faginnhold kan presenteres på flere ulike måter, fra flere ulike vinkler. Resultatene fra TIMSS Advanced tyder på at vi i Norge trenger større variasjon i hvordan matematikk presenteres i skolen.

Geometrioppgave 2
Knowing, Difference of two vectors

Finn differansen $\vec{b} - \vec{a}$ når vektorane er gitt som $\vec{a} = [4, 2]$ og $\vec{b} = [0, 3]$.

Ⓐ $[-4, -2]$

Ⓑ $[-4, 1]$

Ⓒ $[4, -1]$

Ⓓ $[4, 2]$

Ⓔ $[4, 5]$

MA13018		A	B*	C	D	E	Ikke svart
Norge	1998	1	60	22	4	3	9
	2008	1	78	19	1	2	1
	2015	1	80	14	1	1	4
Sverige		4	37	29	9	7	14
USA		2	59	30	3	3	4
Russland		1	74	20	1	3	2
Slovenia		4	47	32	8	3	6
Frankrike		1	80	12	1	1	5
Portugal		1	71	22	1	1	5
Int. gj.snitt		2	62	22	4	3	8

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven omhandler grunnleggende vektorregning og løses ved å regne ut differansen mellom førstekoordinatene $(0 - 4)$ og differansen mellom andrekoordinatene $(3 - 2)$. Det gir vektoren $[-4, 1]$, som betyr at alternativ B er det riktige svaret. Dette er en oppgave med gode norske resultater sammenliknet med andre land. Vektorregning er et område med til dels store variasjoner når det gjelder hvor sterkt det vektlegges i landenes læreplaner. I Norge er vektorregning en sentral del av norsk læreplan i både R1 og R2, i R2 også med tre dimensjoner. Vi er derfor ikke overrasket over at det norske resultatet er helt på topp internasjonalt på denne oppgaven. Det er også verdt å merke seg at det er en klar framgang i de norske elevenes prestasjoner fra 1998 til 2015. Det avspeiler at vektorregning har kommet mer inn i norske læreplaner etter tusenårsskiftet.

I Norge, som i andre land, er det vanligste feilsvaret alternativ C. Svaret i C får man hvis man misforstår oppgaveteksten og beregner den omvendte differansen, $\vec{a} - \vec{b}$. De landene som presterer svakest på oppgaven, er Sverige og Slovenia.

Geometrioppgave 3
Applying, Equation representing set of points

Kva for ei av desse likningane representerer dei punkta $P(x, y)$ som ligg dobbelt så langt frå punktet $A(0, 0)$ som frå punktet $B(5, 0)$?

Ⓐ $x^2 + y^2 = 2(x-5)^2 + 2y^2$

Ⓑ $x^2 + y^2 = 4(x-5)^2 + 4y^2$

Ⓒ $2x^2 + 2y^2 = (x-5)^2 + y^2$

Ⓓ $4x^2 + 4y^2 = (x-5)^2 + y^2$

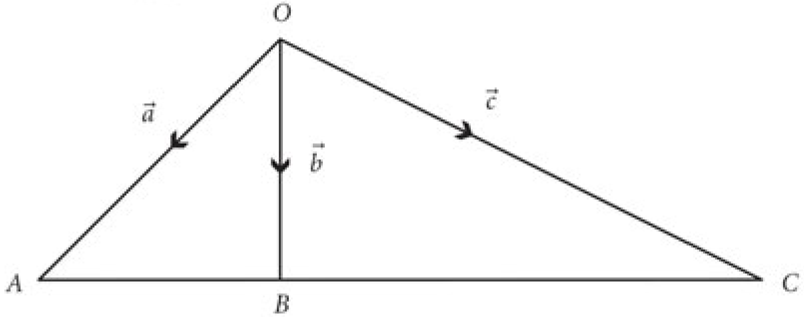
MA13019		A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	1998	19	21	29	9	21
	2008	29	21	29	7	15
	2015	23	27	29	8	14
Sverige		26	23	29	9	13
USA		25	22	38	7	8
Russland		25	29	25	10	11
Slovenia		26	19	36	7	13
Frankrike		26	17	27	7	22
Portugal		23	18	36	8	16
Int. gj.snitt		23	23	29	8	16

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved først å sette opp uttrykkene for avstanden mellom punktene P og A (lik $\sqrt{x^2+y^2}$) og avstanden mellom punktene P og B (lik $\sqrt{(x-5)^2+y^2}$). Det kan være en hjelp å tegne opp et koordinatsystem med de tre punktene før man gjør dette, noe mange elever antakelig har gjort. For å sette opp disse uttrykkene bruker man Pytagoras' setning. Deretter må man finne likningen som uttrykker at den ene avstanden er dobbelt så stor som den andre, nemlig $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$. Ved å kvadrere på begge sider av likhetstegnet får man det riktige svaret B.

Vi ser av elevenes svar at de er ganske likt fordelt på de tre svaralternativene A, B og C. Elevene som svarer alternativ A, har ikke kvadrert 2-tallet, mens elevene som svarer alternativ C, verken har kvadrert 2-tallet eller uttrykt sammenhengen «dobbelt så langt» riktig. De har uttrykt at B ligger dobbelt så langt fra P, en vanlig feil å gjøre hvis man leser teksten syntaktisk: Når man leser «dobbelt så langt fra A som fra B», er det mange som skriver at 2 ganger avstanden fra A er lik avstanden fra B. Her må man også tenke på sammenhengen teksten uttrykker: Det er avstanden til A som er lengre enn avstanden til B, dermed må man gange avstanden til B med 2 for å få avstanden til A. For å se sammenhengen kan det også være fint å lage en tegning. Hvis svaralternativene hadde vært presentert med for eksempel $\sqrt{(x-5)^2+y^2}$, ville trolig flere elever ha svart riktig, selv om mange antakelig fortsatt ville byttet om på plassering av 2-tallet.

Geometrioppgave 4
MA13020 Geometry, Applying, Value of vector in triangle

Punktet B ligg på linja AC. Dersom $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, så er $\vec{c}$ lik:



Ⓐ $2\vec{a} + 3\vec{b}$

Ⓑ $15\vec{b} - 10\vec{a}$

Ⓒ $3\vec{b} - 2\vec{a}$

Ⓓ $10\vec{a} - 15\vec{b}$

Ⓔ $2\vec{a} - 3\vec{b}$

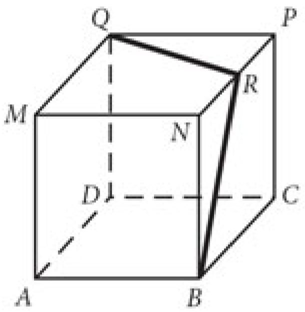
MA13020		A	B	C*	D	E	Ikke svart
Norge	1998	16	21	32	7	7	17
	2008	15	20	36	8	12	8
	2015	10	12	49	7	10	11
Sverige		18	26	18	14	8	16
USA		22	23	30	9	11	6
Russland		20	13	45	7	9	7
Slovenia		16	14	42	8	10	11
Frankrike		12	12	48	6	8	14
Portugal		19	13	30	8	13	17
Int. gj.snitt		16	15	36	8	10	15

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å kalle $\overrightarrow{AB}$ for $\vec{x}$. Siden $\overrightarrow{AC}$ er lik 3 ganger $\overrightarrow{AB}$, gir det at $\overrightarrow{BC} = 2\vec{x}$. Ved hjelp av vektorregning får vi at $\vec{c} = \vec{b} + 2\vec{x}$. Vi kan videre finne et uttrykk for $\vec{x}$ ved at $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, som gir at $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$. Setter vi dette inn i uttrykket for $\vec{c}$, får vi det riktige svaret C.

Dette er en oppgave som dekkes av læreplanen til R1. Men i vektorregningen er det mest fokus på regning med koordinater, i både R1 og R2. Elevene jobber en del med liknende oppgaver i innledningen til vektorregningen, men når koordinatene blir introdusert, blir oppgaver med vektorer på koordinatform prioritert. I eksamensoppgavene er det også primært regning med koordinater i vektoroppgavene.

I Norge svarer halvparten av elevene riktig på denne oppgaven. De norske elevene som svarer feil, fordeler seg ganske likt på de fire gale alternativene. Oppgaven krever noe resonnering, og det er bra at Norge gjør det best av alle landene her. Det viser at regning med vektorer er sentralt lærestoff i Norge, men ikke i alle andre land.

Geometrioppgave 5
Applying, How long is distance between B and Q



Terningen *ABCDMNPQ* er vist ovanfor. *BRQ* er ein av dei moglege vegane mellom *B* og *Q* på overflata av terningen som har kortast lengd.

Kor lang er denne vegen, dersom sidekanten er 1 cm?

Ⓐ $\sqrt{2}$ cm

Ⓑ $\sqrt{3}$ cm

Ⓒ $\sqrt{5}$ cm

Ⓓ $\sqrt{6}$ cm

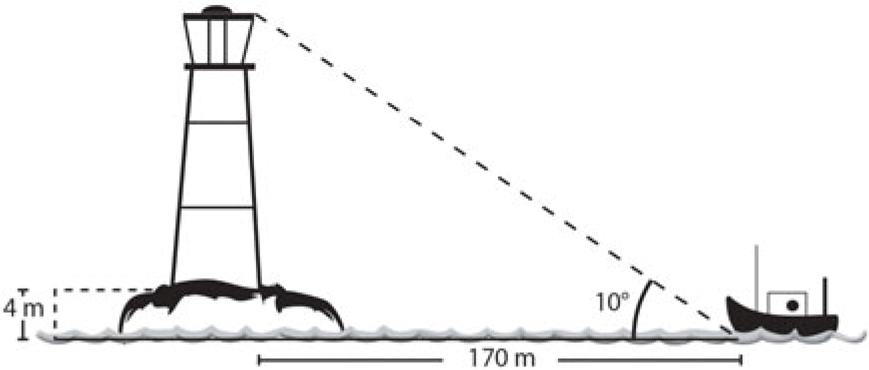
MA23076		A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	2008	11	25	46	13	5
	2015	10	20	54	9	7
Sverige		13	24	49	8	6
USA		16	26	45	6	7
Russland		11	23	60	5	2
Slovenia		11	17	58	10	5
Frankrike		13	21	49	10	7
Portugal		9	12	69	5	6
Int. gj.snitt		12	20	54	7	7

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Oppgaven kan løses ved å brette ut sidene BCPN og PNMQ. Da blir veien BRQ kortest når den er en rett linje. Lengden kan finnes ved hjelp av Pytagoras' setning i trekant BCQ, og svaret blir $\sqrt{5}$ cm, som er alternativ C.

Resultatet for de norske elevene ligger her på det internasjonale gjennomsnittet. Det er framgang i de norske resultatene fra 2008 til 2015. Det er relativt små forskjeller mellom landene i andelen som svarer riktig på oppgaven. De landene som presterer best, er Portugal, Russland og Slovenia. Tar man hensyn til de høye dekningsgradene i Portugal og Slovenia kommer de best ut på denne oppgaven. Det vanligste feilsvaret, i Norge som i andre land, er å velge alternativ B. Hele 20 % av de norske elevene velger dette. Elevene vil få dette svaret dersom de feilaktig velger BN som hypotenusen i trekanten BNR. Dette kan ha å gjøre med at tegningen er i perspektiv, og at de ikke har vært nøye nok og tegnet opp figuren av sideflaten, men gått rett på beregningene.

Den matematiske kunnskapen som testes i denne oppgaven, er en del av pensumet i R1, og norske elever jobber en del med oppgaver av denne typen som innledning til vektorregningen, men etter hvert er det mer vektlegging av regning med koordinater, i både R1 og R2. I eksamensoppgavene er det også primært regning med koordinater. Strengt tatt er dette en oppgave som flinke elever skulle kunne løse på ungdomstrinnet.

Geometrioppgave 6
Applying, What is the height of the lighthouse



Eit fyrtårn står på ein holme. Botnen av fyrtårnet er 4 m over havflata. Ein båt ligg 170 m frå fyrtårnet. Vinkelen mellom havflata og ei rett linje frå båten til toppen av fyrtårnet er 10°. Kor høgt er fyrtårnet, avrunda til nærmaste meter?

Ⓐ 22 m

Ⓑ 26 m

Ⓒ 30 m

Ⓓ 34 m

MA23176		A	B*	C	D	Ikke svart
Norge	2008	5	60	20	9	6
	2015	5	63	19	5	8
Sverige		5	65	18	5	7
USA		5	58	20	8	10
Russland		11	53	18	10	8
Slovenia		4	59	22	5	11
Frankrike		6	52	25	8	11
Portugal		5	65	16	8	7
Int. gj.snitt		6	58	20	7	9

Dette er en flervalgsoppgave kategorisert som anvendelse. Oppgaven kan løses ved bruk av tangens. Man kan sette opp en likning hvor tangens til 10 grader er lik høyden til fyrtårnet og holmen dividert på 170 meter. Denne høyden er tilnærmet 30 meter. For å få høyden på fyrtårnet må man trekke fra 4 meter, som er høyden på holmen. Avrundet til nærmeste meter gir det at fyrtårnets høyde er 26 meter, alternativ B.

Det er små forskjeller i prestasjoner mellom landene på denne oppgaven. De landene som presterer best, er Norge, Sverige og Portugal. Tar man hensyn til dekningsgraden i vurderingen av resultatene, er det Portugal som kommer best ut. Både kontekstmessig og innholdsmessig er dette en oppgave som går rett inn i norsk tradisjon.

Det vanligste feilsvaret i samtlige land er svaralternativ C. Elevene har da antakelig brukt tangens og regnet ut høyden på fyrtårnet og holmen riktig, men glemt å trekke fra høyden på holmen. Dette kan man se på mer som en slurvefeil enn en feil i forståelse, men når så vidt mange elever gjør denne feilen, forteller det at mange elever ikke er flinke til å lese oppgaveteksten nøye og vurdere hva det spørres etter.

Geometrioppgave 7
Knowing, Which is equivalent to equation

Vi går ut frå at $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$. Kva for ei utsegn er da ekvivalent med likninga $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Ⓐ $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$

Ⓑ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle vektorar.

Ⓒ $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på kvarandre.

Ⓓ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$

MA23098		A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	2008	12	35	33	15	5
	2015	10	31	40	13	6
Sverige		11	30	41	10	8
USA		9	36	39	9	7
Russland		11	27	45	11	5
Slovenia		10	27	43	14	6
Frankrike		14	28	34	15	9
Portugal		11	29	39	13	9
Int. gj.snitt		11	30	39	12	9

Dette er en flervalgsoppgave som er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven kan løses ved å observere (gjerne ved tegning) at vektorene $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$ danner diagonalene i parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Hvis lengdene av disse diagonalene er like, vil det si at parallellogrammet er et kvadrat, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre. Det betyr at alternativ C er det riktige svaret på oppgaven.

Det er relativt små variasjoner i prestasjoner mellom landene. I de fleste landene svarer rundt 40 % av elevene riktig på oppgaven. Frankrike er med 34 % det landet som har lavest andel som svarer riktig, men Frankrike har både en høy dekningsgrad og litt yngre elever enn alle de andre referanselandene bortsett fra Russland.

Generelt legges det ganske stor vekt på vektorregning i Norge, og sammenliknet med andre land er den norske prestasjonen ganske bra. Dette på tross av at problemstillingen i oppgaven nok er litt uvant for norske elever. Russland er det landet som har den beste prestasjonen på oppgaven.

Det er alternativ B, det at vektorene er parallelle, som går igjen som det vanligste feilsvaret. I alle land velger rundt 30 % dette feilsvaret.

Geometrioppgave 8
Knowing, Use trig identity to solve function translation

La $\sin\theta = k$.

Da er $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

Ⓐ $\sqrt{1-k^2}$

Ⓑ $1 - k$

Ⓒ $-k$

Ⓓ k

MA33171	A	B	C*	D	Ikke svart
Norge	17	27	32	16	8
Sverige	14	25	31	22	8
USA	21	24	33	19	3
Russland	7	8	65	17	3
Slovenia	10	21	37	22	9
Frankrike	12	21	42	15	9
Portugal	7	9	62	21	2
Int. gj.snitt	12	17	45	20	6

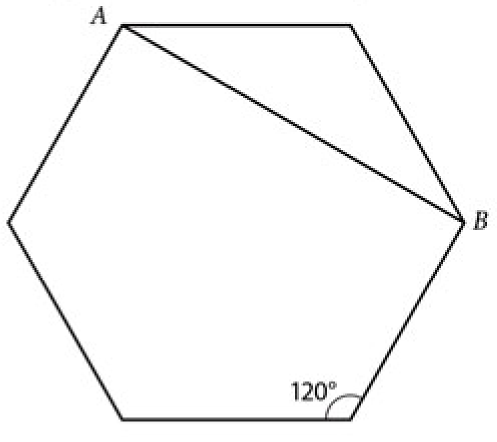
Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som å kunne noe. Oppgaven tar sikte på å teste elevenes kunnskaper om sinus og cosinus, og kan løses på flere måter. En måte å løse den på, er ved å bruke formelen for cosinus til en sum, som sier at $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Denne formelen inngår i oversikten over formler i begynnelsen av tekstheftene som elevene får for å løse oppgaver. Ved å bruke at $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ og $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, får man $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$. Denne siste formelen kan man også argumentere for ut fra enhetssirkelen, og den er antakelig kjent for mange elever. Siden det er oppgitt at $\sin\theta = k$, er riktig svar $-k$, alternativ C. Oppgaven kan også løses ved å ta utgangspunkt i grafene til sinus og cosinus og tenke translasjon.

De norske elevenes prestasjon på oppgaven er klart under det internasjonale gjennomsnittet. Portugal og Russland er de to landene som presterer best på oppgaven, særlig når man tar med i vurderingen den relativt høye dekningsgraden i Portugal, og at elevene i Russland er yngre enn elevene i de andre landene. Dette er nok en type oppgave som de norske elevene ikke er vant til å få. Oppgaven kan som nevnt løses ved å tenke translasjon av funksjoner, noe som ikke er et sentralt tema i verken R1 eller R2. Elevene blir først introdusert for slike transformasjoner i forbindelse med trigonometriske funksjoner i R2.

I denne oppgaven er det ganske stor spredning på hvilket feilsvar elevene velger. De elevene som velger svaralternativene A eller B, har trolig tatt utgangspunkt i sammenhengen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Elevene som velger svaralternativ D kan ha tenkt på formelen $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ og tenkt at denne også gjelder for $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$. Blant de som har fått riktig svar tror vi at elevene har brukt summeformelen slik som beskrevet over.

Geometrioppgave 9
Applying, Solve for hexagon diagonal given side

En regulær sekskant med sidelengde 2 er vist.



Hva er lengden av linjestykket AB?

Vis framgangsmåten.

MA33039	10 Riktig løsning med trigonometri	11 Riktig løsning med geometri	79 Feil løsning	Ikke svart
Norge	38	8	40	15
Sverige	48	0	41	10
USA	22	13	59	5
Russland	27	33	26	14
Slovenia	50	4	44	3
Frankrike	29	1	53	18
Portugal	50	0	43	7
Int. gj.snitt	38	9	41	12

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som anvendelse av kunnskap. Dersom oppgaven løses ved bruk av trigonometri, gir det kode 10. Den kan også løses ved bruk av geometriske egenskaper hos sekskanten, som gir kode 11.

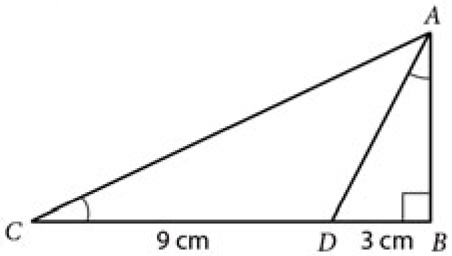
Man kan løse oppgaven trigonometrisk ved å bruke cosinussetningen, som gir at lengden til AB er $2\sqrt{3}$. Eventuelt kan man løse den geometrisk ved å nedfelle høyden fra toppunktet i den trekanten som er angitt i sekskanten, og kalle punktet der høyden treffer grunnlinjen i trekanten for D. Man får da to trekanter med vinkler lik 30, 60 og 90 grader. I en slik trekant (en halv likesidet trekant) er den korteste kateten halvparten av hypotenusen, så høyden som er nedfelt, er lik 1. Ved å bruke Pytagoras' læresetning får man at DB er $\sqrt{3}$, og dermed at AB er $2\sqrt{3}$. Oppgaven kan også løses på en tredje måte – igjen trigonometrisk – ved å bruke sinussetningen på den halve likesidete trekanten. Både sinussetningen og cosinussetningen står i formeloversikten innledningsvis i heftene, noe elevene gjøres oppmerksomme på før de begynner å løse oppgaver.

Av de norske elevene som fikk til denne oppgaven, løste 38 % den ved hjelp av trigonometri. Kun 8 % brukte egenskapene til en 30-60-90-trekant og Pytagoras, noe elevene er kjent med fra ungdomsskolen, og som også er pensum i 1T. Ved introduksjonen til trigonometriske funksjoner i R2 repeteres dette, sammen med trigonometri for trekanter. Det er derfor kanskje litt overraskende at ikke flere norske elever løste oppgaven uten bruk av trigonometri. Det kan se ut til at når elever lærer mer avanserte metoder, er de ikke like bevisste på de enklere resonnementene som kan brukes. Denne typen oppgaver passer til å ta opp dette og diskutere ulike løsningsforslag med elevene. På den måten vedlikeholdes tidligere kunnskap, og man gjør elevene mer bevisste på at det er viktig å vurdere hva som er den beste måten å løse en oppgave på, ikke uten videre velge det som er mest avansert.

Russland er det landet som presterer best på oppgaven, med 60 % som svarer riktig. Det er også interessant at de russiske elevene skiller seg fra elevene i de andre landene ved at de i vel så stor grad løser oppgaven uten bruk av trigonometri. Prestasjonene i Sverige og Portugal er omtrent på nivå med Norges prestasjoner, men der bruker alle elevene trigonometri. Frankrike og USA er de som presterer svakest på oppgaven.

Geometrioppgave 10
Reasoning, Find side given overlapping triangles side ratios

På figuren under er trekanten ABC rettvinklet, og vinkel ACB er lik vinkel DAB.



Hvis $CD = 9$ cm og $DB = 3$ cm, finn lengden til AB.

Svar: ________________ cm

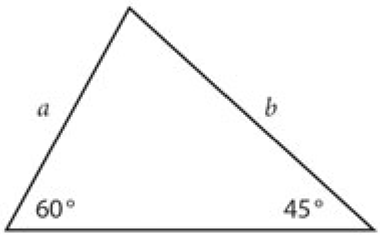
MA33180	10 Rett svar: 6	70 Feil svar: $\sqrt{27}$	79 Andre feil svar	Ikke svart
Norge	37	7	39	17
Sverige	34	3	45	19
USA	31	6	58	4
Russland	55	4	29	11
Slovenia	25	3	62	10
Frankrike	16	1	38	45
Portugal	24	3	56	18
Int. gj.snitt	31	4	44	21

Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses ved bruk av formlike trekanter, der den store trekanten ABC er formlik med den mindre trekanten DBA. Allerede på ungdomstrinnet møter elevene oppgaver hvor de skal beregne lengdene på sider i en trekant ved bruk av formlikhet. Dette er også sentralt lærestoff i 1T og R1. Man kan sette opp likningen $AB/BC = DB/BA$. Setter man inn de kjente lengdene får man $AB/12 = 3/AB$, som ved utregning gir det riktige svaret 6 cm. Dette gir svarkode 10. Elevene får kode 70 hvis de har prøvd å bruke formlike trekanter, men feilaktig brukt lengden 9 istedenfor 12. De får da feilsvaret $\sqrt{27}$.

Norske elever presterer bra i forhold til det internasjonale gjennomsnittet på denne oppgaven, men tatt i betraktning at dette har vært sentralt stoff i matematikk over flere år, kunne man kanskje ha ventet seg et enda bedre resultat. En mulig forklaring på at de norske prestasjonene ikke er bedre, kan være at det er en stund siden de har jobbet med formlikhet, så elevene tenker ikke umiddelbart på å bruke dette. Dette er en oppgavetype som kan brukes både til å vedlikeholde tidligere kunnskap, og til å lære seg å vurdere ulike måter å løse en oppgave på. Det kan være en tendens i norsk skole til at elevene blir noe stereotype i hvordan de angriper oppgaver. Dette kan også ha noe å gjøre med hvordan oppgavene presenteres.

Russland utmerker seg med det klart beste resultatet på oppgaven, Frankrike med den klart svakeste prestasjonen.

Geometrioppgave 11
Applying, Value of compound special triangles ratio



Hva er verdien til $\frac{a^2}{b^2}$?

Ⓐ $\frac{2}{3}$

Ⓑ $\frac{3}{2}$

Ⓒ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

MA33182	A*	B	C	D	Ikke svart
Norge	35	13	21	17	14
Sverige	34	14	21	19	12
USA	43	14	20	12	11
Russland	59	17	11	10	4
Slovenia	38	21	18	13	11
Frankrike	29	19	20	12	20
Portugal	33	24	17	10	16
Int. gj.snitt	42	17	17	12	13

Dette er en flervalgsoppgave som kognitivt er kategorisert som anvendelse av kunnskap. Man kan løse oppgaven ved å bruke sinussetningen og de eksakte verdiene for sinus til 45 og 60 grader. Alt dette står i formeloversikten i begynnelsen av oppgaveheftene som elevene får. Man kan da sette opp likningen $\frac{a}{\sin 45} = \frac{b}{\sin 60}$. Ved å sette inn de eksakte verdiene av sinus får man det riktige svaret 2/3, alternativ A.

Sinussetningen er sentralt stoff i 1T, men mindre brukt høyere opp, særlig i R2. Sammenhengen i matematisk kunnskap forsvinner lett hvis man ikke er god på vedlikehold av det man har lært tidligere. I et hierarkisk fag som matematikk er dette spesielt viktig. Hvor god man er i norsk skole på vedlikehold av tidligere innlært kunnskap, er derfor en del av problematikken når det gjelder å løse denne oppgaven for norske elever. Resultatet for Norge er relativt svakt, det samme er resultatet for Sverige. Begge lands prestasjoner ligger under det internasjonale gjennomsnittet.

Russland har den klart beste prestasjonen på oppgaven, elevene i USA presterer også relativt godt. I alle land er det en ganske stor spredning i hvilke feilsvar elevene velger. At de har fått et feil svar kan skyldes at de har brukt sinussetningen feil, eller at de har gjort en regnefeil når de skal løse likningen.

Geometrioppgave 12
Reasoning, Find maximum animals given periodic function

Antall dyr i en viss populasjon $P(t)$ varierer periodisk med tiden t. Dette kan modelleres ved

$$P(t) = 900 + 600\sin(t + \frac{\pi}{3})$$

Hva er maksimalt antall dyr?
Angi et av tidspunktene da det maksimale antallet dyr forekommer.

Maksimalt antall dyr:

$P(t) =$ ________________

Et tidspunkt da det maksimale antallet forekommer:

$t =$ ________________

MA33232	20 Helt riktig	10 Første svar riktig	11 Andre svar riktig	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	28	21	2	23	27
Sverige	18	32	1	26	24
USA	36	10	6	33	16
Russland	32	11	2	14	41
Slovenia	20	9	2	28	40
Frankrike	13	22	0	25	39
Portugal	30	12	3	26	30
Int. gj.snitt	27	14	2	23	34

Dette er en åpen oppgave. Kognitivt er den kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses ved å bruke at maksimumsverdien for sinus er 1. Man står da igjen med $900 + 600 = 1500$, som er det riktige svaret på første del. Andre deloppgave kan løses ved å bruke at maksimumsverdien til sinus for eksempel forekommer når argumentet er $\frac{\pi}{2}$. Man kan da sette opp likningen $t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Løsningen av likningen gir det riktige svaret, som er $\frac{\pi}{6}$. Elever som har fått begge disse svarene, får kode 20. Elver som bare har første del riktig, får kode 10, elever med bare andre del riktig får kode 11.

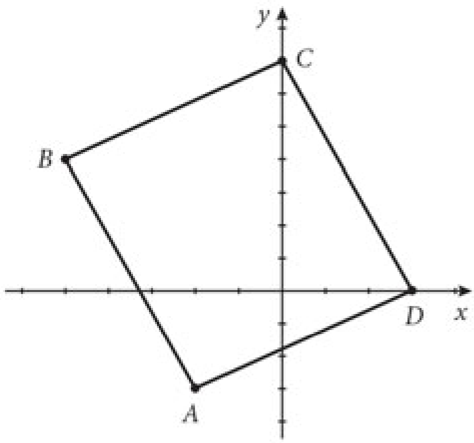
Dette er en oppgave med stoff som er sentralt i R2. Når det gjelder både matematisk innhold og kontekst, passer den godt med lærebøkene i R2 og hva elevene testes på til eksamen. Man kunne derfor kanskje ha ventet et bedre resultat for Norge, hvor 28 % av de norske elevene fikk riktig på begge spørsmålene i oppgaven. Det er imidlertid på nivå med det internasjonale gjennomsnittet.

Det er relativt mange norske elever som greide den første delen, men ikke den andre delen. Det kan skyldes at de ikke visste at sinus har maksverdi 1 for $\frac{\pi}{2}$. I alle landene var det en del elever som bare fikk til første del av oppgaven. De to landene som hadde den laveste prosentandelen med full uttelling på oppgaven, var Frankrike og Sverige, de var samtidig de to landene som hadde størst andel som bare fikk til den første delen.

Geometrioppgave 13
Reasoning, Prove vertices of ABCD make a parallelogram

Hjørnene til en firkant $ABCD$ er $A\ (-2, -3)$, $B\ (-5, 4)$, $C\ (0, 7)$ og $D\ (3, 0)$.

Vis at $ABCD$ er et parallellogram.



MA33178	10 Rett svar med stigningstall	11 Rett svar med vektorer	79 Feil svar	Ikke svart
Norge	5	49	18	28
Sverige	18	0	33	49
USA	41	1	47	11
Russland	29	7	26	39
Slovenia	22	1	46	31
Frankrike	24	22	33	21
Portugal	24	4	33	39
Int. gj.snitt	23	15	31	31

Dette er en åpen oppgave som kognitivt er kategorisert som resonnering. Oppgaven kan løses på flere måter. To måter er å vise at motstående sider i firkanten har parvis like stigningstall eller er parvis like lange. Elever som løste oppgaven på en av disse måtene, fikk kode 10. Oppgaven kan også løses ved bruk av vektorer. Man kan for eksempel vise at vektor AB er lik vektor DC, noe som ga kode 11.

De norske prestasjonene var helt på topp internasjonalt på denne oppgaven, og markant bedre enn det internasjonale gjennomsnittet. Samtidig utmerket Norge seg med at nesten alle elevene løste oppgaven ved hjelp av vektorregning. I Frankrike, som var det landet som sammen med Norge hadde de beste prestasjonene, var det en relativt jevn fordeling når det gjaldt måten oppgaven ble løst på. I alle de andre landene var det en klar overvekt som ikke brukte vektorregning, men som løste oppgaven ved bruk av stigningstall eller lengder på sidene i firkanten. De landene som presterte klart svakest på oppgaven, var Sverige og Slovenia.

Oppgaven illustrerer at det er til dels store forskjeller mellom land når det gjelder vektlegging av regning med vektorer. Resultatet viser at vektorregning er mer sentralt pensumstoff i Norge enn i mange andre land. Denne oppgaven illustrerer noen klare forskjeller mellom Norge og Sverige når det gjelder vektlegging av geometri i skolen, noe vi også har sett på lavere trinn.

Avsluttende kommentarer

Resultatene presentert i dette kapittelet illustrerer at geometri er det fagområdet hvor de norske elevene presterer best i TIMSS Advanced 2015, sammenliknet med resultatene i andre land og sammenliknet med vårt eget generelle prestasjonsnivå (jamfør kapittel 6 og Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Som vi har sett, kan noen av oppgavene som elevene får i geometri i TIMSS Advanced, løses kun med kunnskaper fra ungdomstrinnet, som bruk av Pytagoras' setning og kunnskaper om trekanter med 30, 60 og 90 graders vinkler.

Når det gjelder valg av løsningsmetoder, ser det ut til at norske elever har en tendens til å anvende de metodene de har lært relativt nylig, som for eksempel trigonometri, selv om oppgavene kan løses enklere ved tidligere lærte metoder. Dette kan tolkes som at man i skolen kan bli flinkere til å vektlegge vedlikehold av tidligere innlært stoff, gjerne ved å variere oppgavene slik at elevene opplever at tidligere lærte metoder kan bidra til å forenkle problemet.

Geometri er det fagområdet i TIMSS Advanced hvor det er mest variasjon mellom hva som vektlegges i ulike land. Dette illustreres i resultatene på flere av oppgavene. For eksempel ser vi av resultatene at vektorregning står sentralt i Norge, men ikke i en del andre land.

KAPITTEL 11

Et praksisperspektiv: Bruk av TIMSS Advanced i matematikkundervisningen

Ingvill Merete Stedøy
Avdeling realfag, Lillestrøm videregående skole
Matematikksenteret, NTNU, Trondheim
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

I dette kapitlet beskrives eksempler på hvordan man i skolen kan bruke oppgaver og resultater fra TIMSS Advanced som inspirasjon til å lage praktiske undervisningsopplegg. De vinklingene og eksemplene som gis, er naturligvis preget av forfatternes egen erfaringsbakgrunn. Ideene til måter å undervise på er akkurat det, ideer og innspill, og ikke fasitsvar på hvordan ting skal eller bør gjøres.

11.1 Relevans av TIMSS Advanced for matematikkundervisningen

Mange spør om det er riktig å bruke tid og ressurser på at Norge skal delta i internasjonale undersøkelser som TIMSS Advanced og TIMSS. Hva kan vi bruke resultatene til? Kan resultatene og elevenes feilsvar eller mangel på svar hjelpe oss til å gjøre undervisningen bedre? Det kan være interessant å se hvilke oppgavetyper våre R2-elever klarer og ikke klarer. TIMSS Advanced kan avdekke mye mer enn bare hvordan norske elever presterer sammenliknet med elever i andre land. Går man dypere inn i resultatene fra disse studiene, og ikke bare ser på og sammenlikner de generelle prestasjonene, kan det reises mange interessante og viktige debatter.

I de neste delkapitlene tar vi opp og kommer med forslag til bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i undervisningen i skolen. Disse oppgavene er hentet fra kapittel 8, 9 og 10, som gir en systematisk gjennomgang av alle frigitte oppgaver i henholdsvis algebra, kalkulus og geometri fra TIMSS Advanced 2015.

Vi skal her kort skissere noen problemområder når man ser på de norske prestasjonsresultatene, og som er relevante for undervisningsskissene som følger i de neste delkapitlene.

Resultatene i TIMSS Advanced kan indikere at elever i Norge har problemer med å lese, forstå og bruke abstrakte symboler. Det ser ut til at de strever med å skille mellom parametere og variable, uavhengige og avhengige variabler.

Det er ikke tradisjon i norske læreplaner, lærebøker og oppgaver for å jobbe med transformasjon av funksjoner, sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner. I dette kapitlet kommer vi blant annet med skisser til undervisningsopplegg som kan bidra til å bedre elevenes forståelse av funksjonsbegrepet.

Oppgavene fra TIMSS Advanced presentert i kapittel 9 avslører at begreper som grenseverdi og kontinuitet synes å være lite forstått av mange elever i R2. Dette er sentrale begreper i funksjonslære og kalkulus og viktig kunnskap med tanke på videre studier på universitetsnivå. For mer om dette se kapittel 12, som drøfter overgangen mellom videregående skole og universitet.

Resultatene på TIMSS Advanced-oppgaver tyder på at mange norske elever mangler dybdeforståelse for viktige matematiske begreper. Det vil kunne bidra til å øke den matematiske forståelsen hvis det ikke bare legges vekt på å løse en oppgave, men også på å diskutere hvorfor metodene fungerer i en gitt situasjon. Elevene kan trenes opp til å begrunne, bruke presise begreper, forklare og bevise, både skriftlig og muntlig, gjennom måten vi legger opp undervisningen på. Alle elever vil vinne på å vite *hvorfor*, ikke bare *hvordan*. Sammenlikninger mellom ulike land både i TIMSS Advanced og TIMSS grunnskole har i tidligere rapporter pekt på at det ser ut til å være en noe ensidig vekt på oppgaveløsning i Norge, mens det er mer diskusjoner og drøftinger i klassen i andre land (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010; Grønmo et al., 2012). Vi ser imidlertid tegn på at dette er i ferd med å endre seg i Norge, og vi vil i de neste delkapitlene gi flere eksempler som kan brukes til diskusjon og drøfting.

Resultatene fra TIMSS Advanced tyder også på at norske elever har et for begrenset spekter av strategier og løsningsmetoder. I Norge har vi tradisjon for å «hjelpe elevene gjennom» oppgaven. I den grad vi gir oppgaver som krever mellomregninger og delsvar, deles oppgavene i a, b, c og så videre. Elevene loses gjennom oppgaven, og de trenger i liten grad å se helheten ved å analysere oppgaven og vurdere og planlegge løsningsstrategier. I TIMSS Advanced er det en del oppgaver der elevene selv må finne ut hvordan de skal løse oppgaven trinn for trinn. Disse oppgavene viser seg å være vanskelige for norske elever. Vi tror elevene bør utfordres til å løse det vi kan kalle flertrinnsoppgaver. Det kan for eksempel skje i undervisningssituasjoner der elevene diskuterer og samarbeider, og der de legger opp strategier og metoder de trenger for å løse oppgaven. På den måten vil de være bedre forberedt til å klare slike oppgaver også i prøvesituasjoner. Vi gir noen eksempler på slike opplegg i dette kapitlet.

Resultatene på oppgavene i TIMSS Advanced gir indikasjoner på at norske elever i liten grad klarer å vedlikeholde kunnskaper fra tidligere år. Vi ser en tendens til at elevene griper til for avanserte metoder når de skal løse oppgaver som kunne vært løst med langt enklere metoder. De mer avanserte metodene har de lært nylig, mens de enklere ofte var pensum på lavere trinn. Eksempelvis prøver de med sinussetningen når oppgaven krever bruk av formlikhet, og når sinussetningen ikke kan brukes, gir de opp. Dette kan være et tegn på at elevene ikke har utholdenhet og evne til å forkaste en metode når den ikke virker, og i stedet prøve å angripe oppgaven på en annen måte.

Prestasjonsdata fra TIMSS Advanced tyder på at norske elever er lite vant til å løse oppgaver som ikke følger et mønster og oppsett de har sett før. Norske læreplaner har klare beskrivelser av at høy måloppnåelse innebærer at elevene skal kunne bruke det de har lært på nye problemstillinger og i nye sammenhenger (KD, 2006), men dette testes i liten grad på eksamen, i alle fall på del 1 (uten hjelpemidler). Vi ser muligheter for at bruk av oppgavene fra TIMSS Advanced kan bidra til at elevene utvikler seg faglig, og at de kan bli i bedre stand til å møte uvante problemstillinger og annerledes oppgaver enn det som presenteres i lærebøkene. Oppgaveformuleringene i TIMSS er ofte annerledes enn i norske eksamensoppgaver og oppgaver fra lærebøkene. Hvis vi lykkes med å utvikle elevenes evne til å anvende kunnskapen sin i nye sammenhenger og på nye situasjoner, vil det kunne styrke deres matematiske forståelse.

11.2 Forslag til bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i programfagene R1 og R2

I dette delkapitlet beskriver vi undervisningsskisser, dvs. forslag og ideer, til bruk i undervisningen av R-kursene i videregående skole. Forslagene er basert på relevante generelle resultater for norske elever nevnt i forrige delkapittel og er knyttet opp mot ulike oppgaver fra TIMSS Advanced.

Undervisningsskisse 1

Tema: Transformasjon av funksjoner

Den første undervisningsskissen er inspirert av geometrioppgave 8 i TIMSS Advanced (se figur 11.1).

Figur 11.1 Geometrioppgave 8 fra TIMSS Advanced 2015.

La $\sin\theta = k$.

Da er $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

A $\sqrt{1-k^2}$

B $1-k$

C $-k$

D k

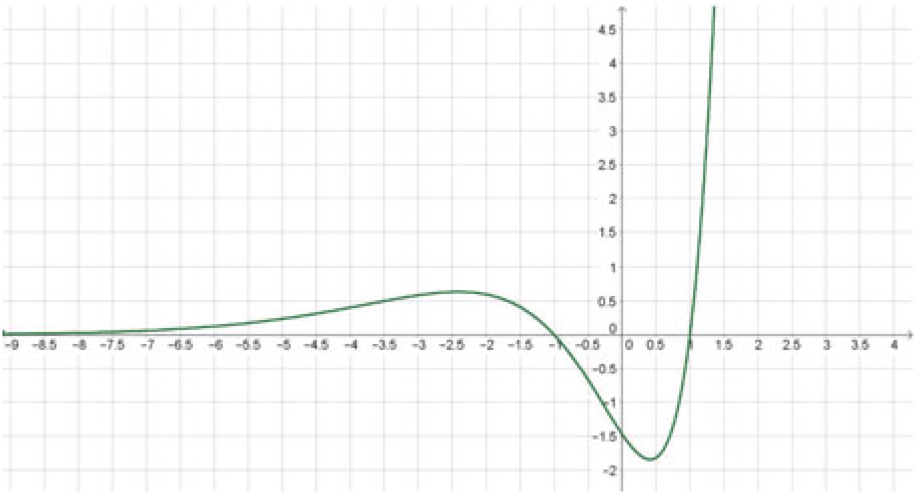
Denne oppgaven kan løses ved å tenke translasjon av funksjoner (se kapittel 10 for mer om denne oppgaven). Transformasjon av funksjoner, og spesielt translasjon, er et tema det fokuseres lite på i norske læreplaner og lærebøker. Ved å arbeide med dette temaet vil elevene kunne utvikle en dypere forståelse for sammenhengen mellom funksjonsuttrykket og grafen til en funksjon.

I denne undervisningsskissen tar vi for oss utforskning av transformasjoner og symmetriegenskaper for funksjoner, og vi foreslår ulike oppgaver som kan brukes til dette. Vi forslår også at elevene utfordres på geometrioppgave 8 (figur 11.1) fra TIMSS Advanced 2015, noe som kanskje fungerer best etter at de har jobbet med oppgavene vi foreslår. Oppgavene vil kunne hjelpe elevene når de skal jobbe med trigonometriske funksjoner og beskrive periodiske funksjoners «strekking», faseforskyvning og forflytning av likevektslinjen. Videre vil de kunne hjelpe på forståelsen av sammensatte funksjoner (se også undervisningsskisse 6) og visualisering av løsninger av differensiallikninger.

Del 1

I denne delen tar vi utgangspunkt i grafen til en funksjon, for eksempel den som er vist i figur 11.2. Læreren lager 5 kopier av grafen på samme ark, merker figurene a, b, c, d og e og deler så ut arkene til elevene.

Figur 11.2 Grafen til en funksjon f. Del 1 av undervisningsskisse 1.



Elevene får følgende oppgaver til det utdelte arket:

På arket ser du grafen til en funksjon f. Bruk én figur til hver deloppgave og tegn grafen til funksjonene i samme koordinatsystem som grafen til f for å se sammenhenger mellom grafene.

a) $f(x) + 2$ og $f(x) - 2$
b) $f(x + 2)$ og $f(x - 2)$
c) $2f(x)$ og $f(2x)$

d) $f(2x-2)$ og $f(2(x-2))$
e) $-f(x)$ og $f(-x)$

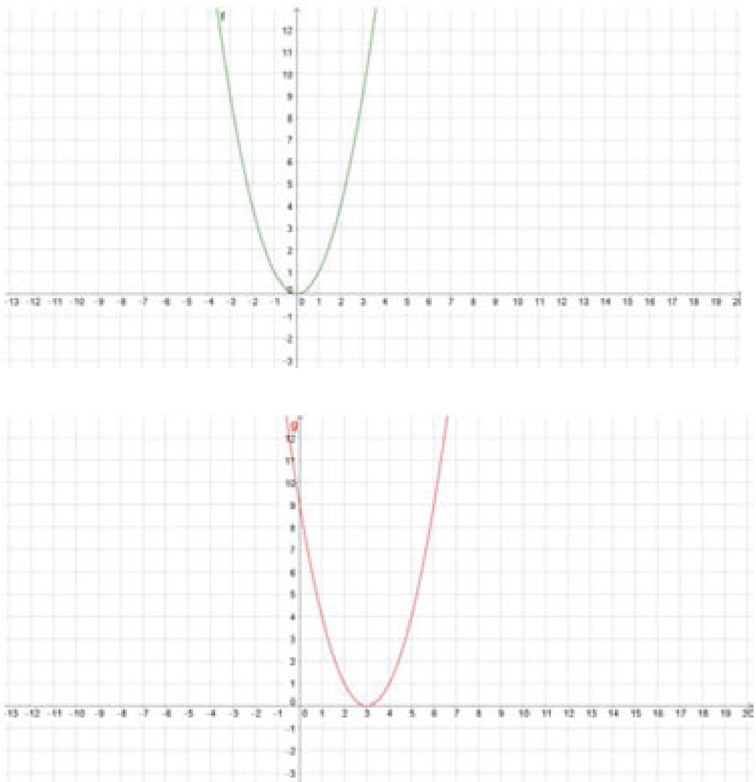
Beskriv for hver deloppgave hva som skjer med grafene du har tegnet sammenliknet med den opprinnelige grafen.

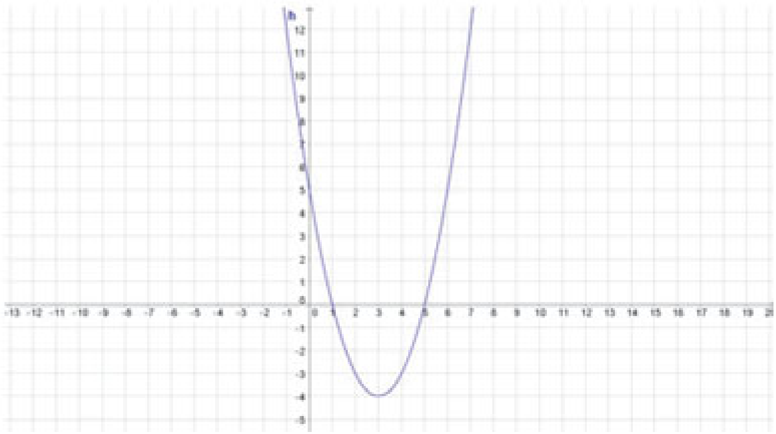
Del 2

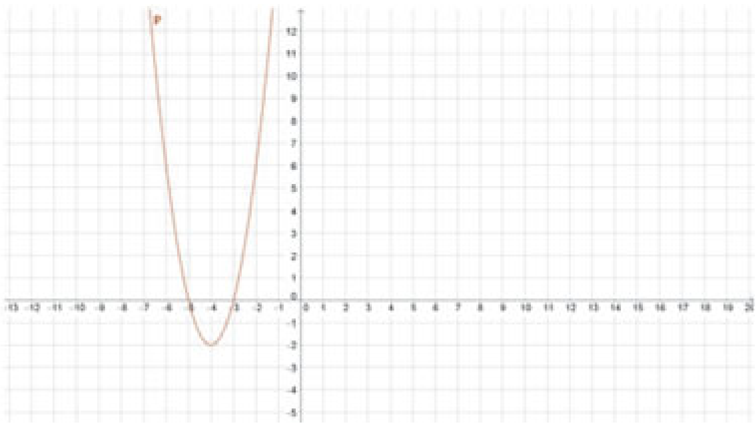
Del 2 bygger videre på del 1, der elevene nå får følgende oppgave til figur 11.3:

Nedenfor ser du fire parabler. Parabelen øverst til venstre er grafen til funksjonen $f(x)=x^2$. Bruk det du fant ut i oppgaven foran til å finne et funksjonsuttrykk for de andre parablene.

Figur 11.3 Figur til del 2 av undervisningsskisse 1.







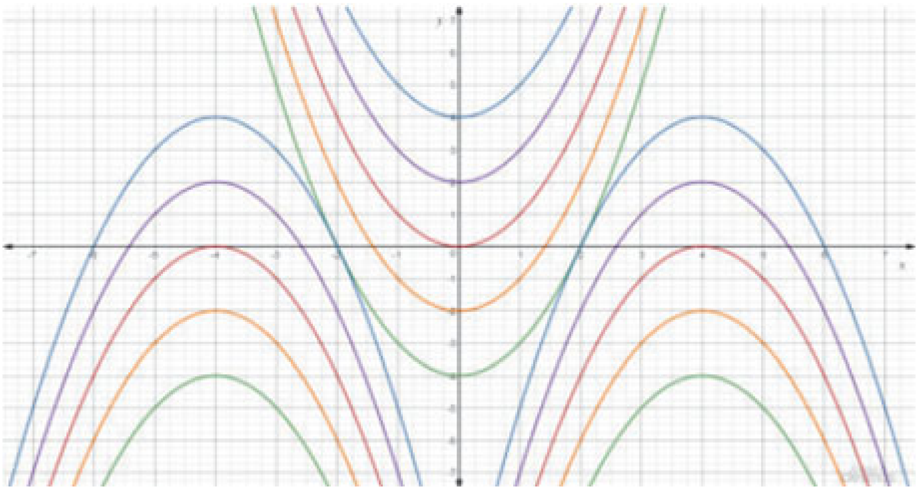
Del 3

I denne delen får elevene følgende oppgaver som er hentet fra https://nrich.maths.org:

I de to første oppgavene skal elevene bli bedre kjent med sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf (figur 11.4 og 11.5). Den tredje oppgaven (figur 11.6) kan også ses i sammenheng med undervisningsskisse 6, om sammensatte og omvendte funksjoner.

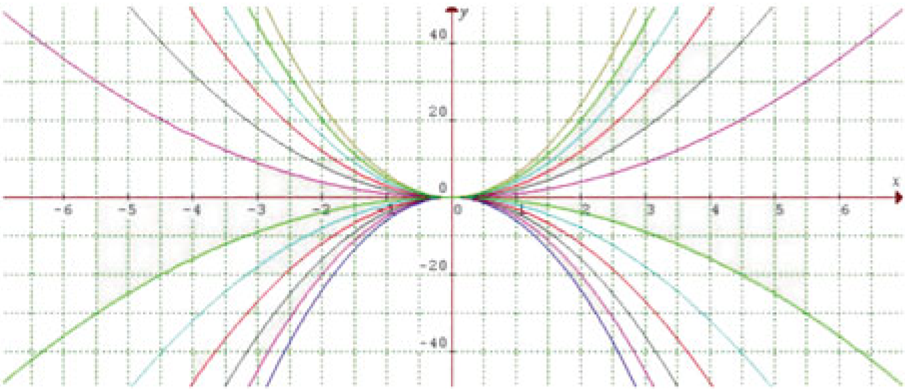
Oppgave 1: Illustrasjonen nedenfor viser grafene til femten ulike funksjoner. To av dem oppfyller likningene $y = x^2$ og $y = -(x - 4)^2$. Finn likningene til de andre parablene.

Figur 11.4 Figur til oppgave 1 i del 3 av undervisningsskisse 1.



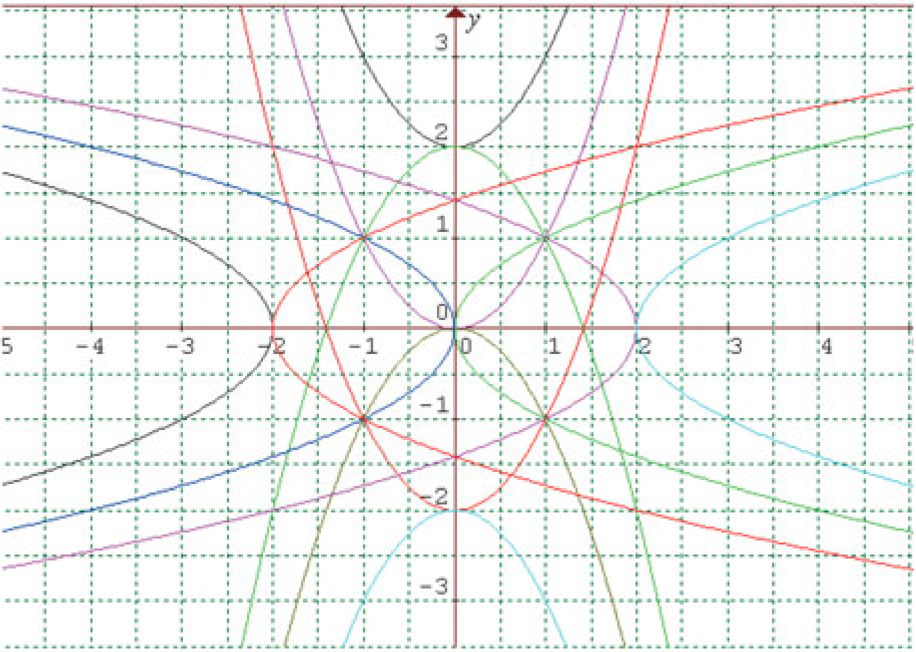
Oppgave 2: Kan du bestemme likningene til parablene i figuren nedenfor?

Figur 11.5 Figur til oppgave 2 i del 3 av undervisningsskisse 1.



Oppgave 3: Illustrasjonen nedenfor viser tolv grafer. Tre av dem oppfyller likningene $y = x^2$, $x = y^2$ og $x = -y^2 + 2$. Bestem likningene til de andre grafene.

Figur 11.6 Figur til oppgave 3 i del 3 av undervisningsskisse 1.

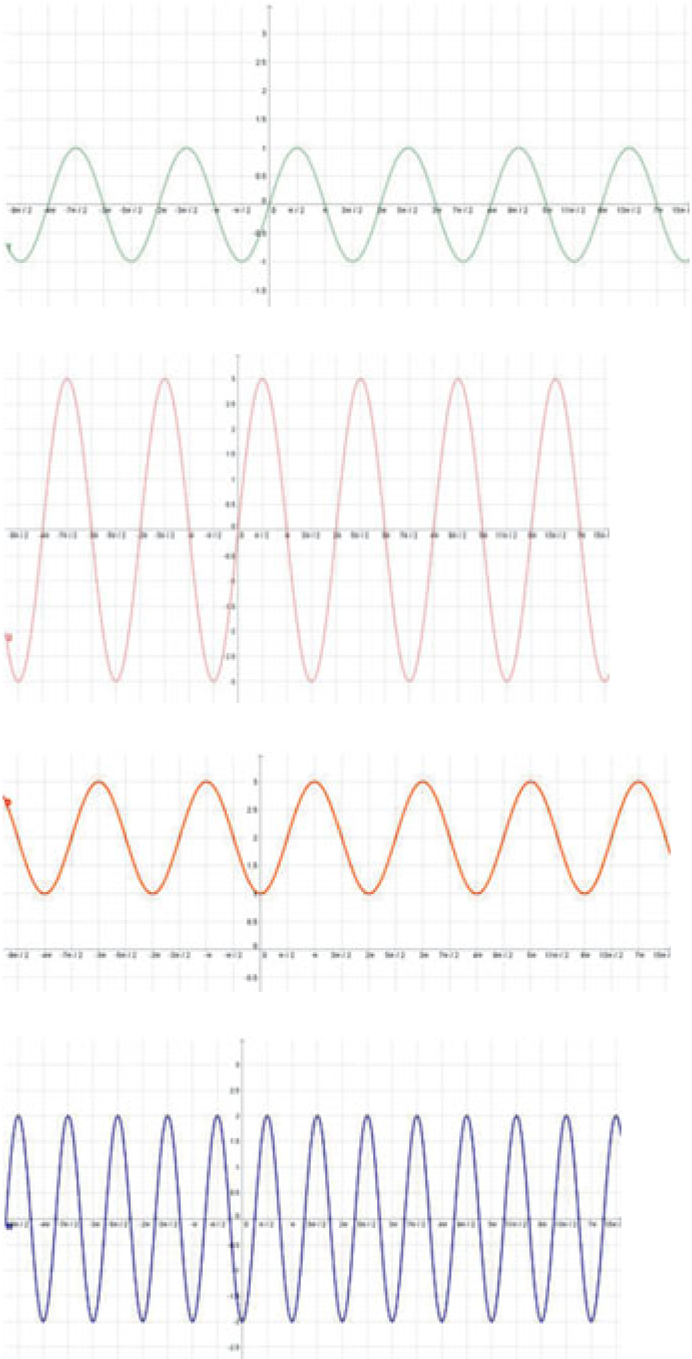


Del 4

I denne delen (figur 11.7) skal elevene sette sammen det de har lært i de andre delene og jobbe med harmoniske svingninger (sinusfunksjoner).

Elevene får følgende oppgave: Nedenfor ser du fire sinusfunksjoner. Grafen øverst til venstre er grafen til funksjonen $f(x) = \sin x$. Finn et funksjonsuttrykk for de andre sinusfunksjonene.

Figur 11.7 Figur til del 4 av undervisningsskisse 1.



Undervisningsskisse 2

Tema: Faktorisering

Denne undervisningsskissen tar utgangspunkt i noen av de problemene vi så at norske elever hadde når det gjaldt å løse algebraoppgave 1 i TIMSS Advanced 2015, se figur 11.8. I undervisningsskisse 11 bruker vi også denne oppgaven som forslag til opplegg i grunnskolen og starten av videregående skole.

Figur 11.8 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x - y}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

Denne oppgaven tester grunnleggende formelmanipulasjoner. De norske R2-elevene presterte svakt på oppgaven; bare 23 % av de norske elevene løste den mot et internasjonalt gjennomsnitt på 49 %. For å løse oppgaven må elevene ha en rimelig god forståelse av faktorisering og bruk av kvadratsetningene.

Faktorisering er et viktig grunnlag for å løse likninger. Mange norske elever synes å være usikre på hva som menes med faktorisering av algebraiske uttrykk med flere ledd. Vi ser ofte at elever for eksempel gjør følgende når de blir bedt om å faktorisere:

$$4x^3 - x = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x - x$$

Og så tenker de at de er ferdig med faktoriseringen, istedenfor å se direkte eller i to steg at

$$4x^3 - x = x(2x - 1)(2x + 1)$$

Elevene har for lite trening i å se på hele uttrykket og trenger øvelse for å vite hva de skal se etter. Det er mange som kan gjenkjenne konjugatsetningen når leddene er kvadrater, men som ikke ser at for eksempel

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Mange har vanskeligheter med å lage fullstendig kvadrat hvis det involverer brøkregning, slik som

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

selv om noen etter hvert løser denne ved å se eller gjette røttene til polynomet.

Vi anbefaler at elevene får arbeide mye med faktorisering av algebraiske uttrykk. Lag gjerne mange oppgaver, og utfordre elevene til å diskutere hvordan de kan se på uttrykket hva som er en god strategi før de løser oppgaven.

La elevene diskutere om uttrykk på formen $a - b$ kan faktoriseres. Start med $a^2 - b^2$. De fleste elevene vil vite at det kan faktoriseres ved hjelp av konjugatsetningen. Men det vil være uvant for mange elever å tenke at $(a - b) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ hvis $a > 0$ og $b > 0$.

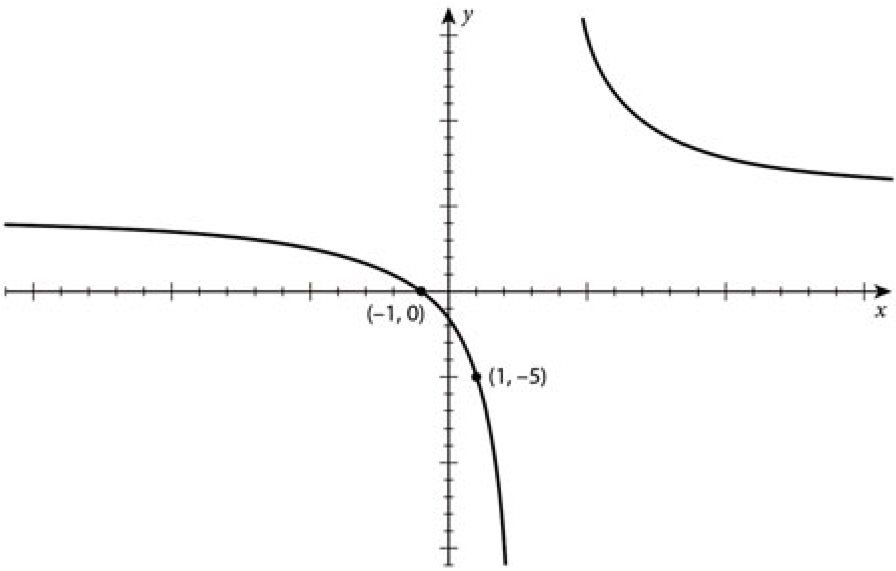
Etter at elevene har arbeidet med oppgaver av den typen vi har skissert over, kan det passe å gi dem algebraoppgaven i figur 11.8. I Norge valgte 27 % av elevene feilsvaret D. Det ser ut til at disse elevene har tenkt at man kan dele opp uttrykket i to brøker direkte, noe som indikerer svake kunnskaper om brøk og bruk av fellesnevner, og det er noe man kanskje ikke ville forvente av R2-elever.

Undervisningsskisse 3

Tema: Fra graf til funksjonsuttrykk

I denne undervisningsskissen vil vi gjøre bruk av algebraoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015, se figur 11.9.

Figur 11.9 Algebraoppgave 12 i TIMSS Advanced 2015.



Grafen til funksjonen $f(x)=\dfrac{ax+5}{x+b}$ er vist over. Finn verdiene til a og b.

a = ________________

b = ________________

Elevene i norsk skole blir sjelden utfordret i å finne funksjonsuttrykk for ulike funksjoner der de har ulike opplysninger om funksjonen. Resultatet for norske elever på denne oppgaven gir indikasjoner på det, ettersom bare 22 % i Norge løste oppgaven mot et internasjonalt gjennomsnitt på 33 %. Denne typen oppgaver er lite vektlagt i dagens læreplaner og lærebøker, i alle fall i R-matematikken.

Undervisningsskissen nedenfor tar sikte på å gi elevene slike utfordringer, samtidig som de skal reflektere over hvor mye de trenger å vite om funksjonen før de kan sette opp et funksjonsuttrykk. Det er ikke meningen at elevene skal bruke digitale hjelpemidler til dette opplegget.

Polynomer

Vi foreslår å starte med lineære funksjoner. Det er også et eget opplegg om det i undervisningsskisse 4.

1. En lineær funksjon f kan skrives på formen $f(x) = ax + b$, der x er den frie variabelen og a og b er konstanter som er unike for hver lineære funksjon.

   Diskuter følgende:
   - Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én linje som går gjennom disse punktene?
   - Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a og b?
   - Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for den lineære funksjonen på?

2. Et andregradspolynom kan skrives på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, der x er den frie variabelen og a, b og c er konstanter (a er forskjellig fra 0) som er unike for hver andregradsfunksjon.

   Diskuter følgende:
   - Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én andregradsfunksjon som går gjennom disse punktene?
   - Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a, b og c?
   - Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for andregradsfunksjonen på?

3. Svar på de samme spørsmålene for tredje-, fjerde- og n-te-gradsfunksjoner (der n er et naturlig tall).

Brøkfunksjoner

Enkle brøkfunksjoner er på formen $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, der x er den frie variabelen, mens a, b, c og d er konstanter (c og d er ikke begge lik 0) som er unike for hver funksjon på denne formen.

Diskuter følgende:

- Hvor mange punkter må du ha for at det skal finnes nøyaktig én funksjon på denne formen som går gjennom disse punktene?
- Hvordan kan du bruke punktene til å bestemme a, b, c og d?
- Er det flere måter å bestemme funksjonsuttrykket for brøkfunksjonen på?

Hvis du kjenner noen av konstantene, kan du selvsagt klare deg med færre opplysninger.

Også her kan det passe å gi oppgaven fra TIMSS Advanced i figur 11.9 til elevene etter at de har vært gjennom noe av det vi har skissert foran. Diskuter gjerne med elevene hvordan man kan løse oppgaven, og eventuelt hva som kan ligge bak de ulike feilsvarene. For mer informasjon om oppgaven, se kapittel 8.

Undervisningsskisse 4

Tema: Rette linjer – likningsframstilling og parameterframstilling

I undervisningsskisse 3 tok vi opp og kom med noen forslag til undervisning om lineære funksjoner. Vi skal nå se litt nærmere på hvordan elevene kan jobbe med ulike framstillinger av rette linjer, og vi vil blant annet gjøre bruk av geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015, se figur 11.10.

Bare 23 % av de norske elevene svarer riktig på denne oppgaven i 2015, mens det i 2008 var 30 % av de norske elevene som svarte riktig. For mer informasjon om dette se kapittel 10. Måten oppgaven er presentert på, kan ha vært noe fremmed for norske elever. De er nok mer vant til å løse denne typen oppgaver ved bruk av vektorregning, med linjer presentert som parameterframstilling med retningsvektorer. Hadde oppgaven blitt presentert som en vektoroppgave / linjer skrevet med parameterframstilling kan det være at flere norske elever hadde svart riktig. Men som vi har påpekt flere andre steder i boka, er det en fordel om oppgaver til elevene presenteres på ulike måter, det er i seg selv en måte å øke deres matematiske forståelse på. Å bruke denne oppgaven fra TIMSS Advanced kan derfor bidra til det.

Figur 11.10 Geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Kva for ei av desse linjene er vinkelrett på linja $\mathbf{6x+2y=4}$ og går gjennom punktet $(-6, 5)$?

Ⓐ $3x - y = -23$

Ⓑ $3x - 7 = 13$

Ⓒ $3x - 9y = 9$

Ⓓ $x - 3y = -7$

Ⓔ $x - 3y = -21$

Mange norske elever lærer faktakunnskaper, men er lite vant til å lete etter sammenhenger, begrunnelser og bevis. Elevene vil gi ulike svar på spørsmålet «Hva må du vite for å kunne bestemme en rett linje?», avhengig av hvilke temaer elevene jobber med. Hvis det er lineære funksjoner som er temaet, vil elevene kanskje svare at de må vite stigningstallet og konstantleddet. Hvis vektorregning er temaet, vil elevene kanskje si at de må kjenne et punkt på linjen og en retningsvektor.

Hvis du spør elever i grunnskolen, vil de nok svare at to punkter bestemmer en rett linje. Hvis du har ett punkt, vil det være uendelig mange rette linjer som går gjennom punktet, og hvis du har tre punkter eller mer, er det ikke sikkert at alle ligger på samme rette linje. Dette kan elevene i grunnskolen være i stand til å utforske og innse.

La dette være utgangspunktet for spørsmål til elever i videregående skole. Still for eksempel et åpent spørsmål av typen:

Hvilke opplysninger må du ha for å kunne bestemme en rett linje?

Oppmuntre elevene til å komme med så mange forslag som mulig. Mulige svar kan da være:

- to punkter
- ett punkt og en parallell linje
- ett punkt og en normal linje
- ett punkt og en bestemt vinkel linjen skal danne med en annen linje

Ut fra disse forslagene kan elevene få i oppgave å lage eksempler på de ulike tilfellene, konstruere linjene, legge dem inn i et koordinatsystem, og finne en likningsframstilling og en parameterframstilling for linjene.

Til videre utforskning kan elevene svare på følgende spørsmål:

- Hva er sammenhengen mellom likningsframstilling og parameterframstilling?
- Hvordan kan du finne likningsframstillingen til en linje hvis du kjenner parameterframstillingen og omvendt?
- Hvis du har en parameterframstilling for to rette linjer, hvordan kan du se om de står normalt på hverandre? Hvordan kan du se om de er parallelle?
- Hvis du har en likningsframstilling for to rette linjer, hvordan kan du se om de står normalt på hverandre? Hvordan kan du se om de er parallelle?

Etter at elevene har vært gjennom et slikt opplegg, med refleksjoner og diskusjoner, er tiden inne til å gi dem geometrioppgave 1 fra TIMSS Advanced, se figur 11.10.

Undervisningsskisse 5

Tema: Sammensatte maksimerings- og minimeringsoppgaver

Eksamensoppgaver og oppgaver i lærebøker er ofte laget slik at elevene loses gjennom oppgavene. De kan bruke én og én ferdighet eller metode av gangen, og til slutt komme fram til svaret på et sammensatt problem. Elevene læres opp til å bruke strategiene Lithner kaller «husketenkning» eller «algoritmisk tenkning» (Lithner, 2008). Alt som er forståelsesmessig vanskelig er tatt ut av oppgavene de skal løse. Bare det aller letteste blir overlatt til eleven. Dette kan enten ligge i måten oppgaven er oppdelt og strukturert på, eller det kan skje når læreren stiller hjelpespørsmål og loser elevene gjennom løsningsprosessen.

Ved å jobbe på denne måten gjør vi elevene en bjørnetjeneste. Elevene våre får ikke øvelse i å se helheten. De får heller ikke øvelse i å tenke: «Hva må jeg vite for å kunne svare på det oppgaven spør etter?», for deretter å arbeide seg systematisk fram til dette ut fra en analyse av oppgaven og opplysningene som er gitt. De blir sjelden eller aldri utfordret i det Lithner kaller «kreativ matematisk tenkning» (Lithner, 2008). Dette er tatt opp i *Tangenten* 2, 2015, der Andresen beskriver en studie av elever i videregående skole (Andresen, 2015)

Nedenfor er det noen oppgaver som elevene kan jobbe med for å trene på slik tenkning, inkludert en TIMSS Advanced-oppgave.

Oppgave 1: Bestem det største arealet

Du skal lage en trekantet inngjerding inntil en husvegg. Trekanten skal være likebeint, slik at de to sidene som dekker gjerdet er like lange. Lengden av gjerdet er s.

Hva er det største arealet området som inngjerdes kan ha?

Finn flere måter å løse problemet på.

Bestem arealet når $s = 10$.

Oppgave 2: Bestem det største volumet

Du skal lage en eske av et rektangulært stykke papp. Langsidene i rektangelet er dobbelt så lange som kortsidene. Esken skal lages ved å skjære av like kvadrater i hvert hjørne og brette opp sidekantene.

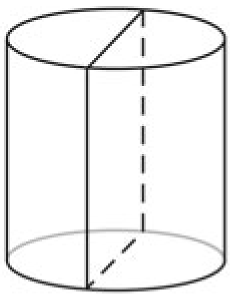
Bestem det største volumet esken kan ha.

Bestem det største volumet av esken når den korteste siden er 1 m.

Oppgave 3: Størst areal
Vis at hvis du har et rektangel med en gitt omkrets, er formen på det største arealet som rektangelet kan ha, et kvadrat.

Oppgave 4: TIMSS Advanced-oppgave
Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced (figur 11.11). (Se kapittel 9 for mer om denne oppgaven.)

Figur 11.11 Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015.



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

Ⓐ 2,5 m

Ⓑ 2 m

Ⓒ 1,5 m

Ⓓ 1 m

Ⓔ 0,5 m

Undervisningsskisse 6

Tema: Sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner

Generell teori for sammensatte og omvendte funksjoner er i dag tonet ned i læreplanene for norsk videregående skole, og er tilnærmet fraværende i lærebøkene. Det er flere grunner til at man bør legge mer vekt på dette enn det gjøres i dag. Grundigere innføring i disse begrepene kan bidra til å øke den generelle forståelsen av funksjoner. Det vil også kunne bidra til å gjøre kjerneregelen for derivasjon mer forståelig for elevene.

Elevene møter funksjonsbegrepet allerede på ungdomstrinnet og ved starten av videregående skole. Elevers oppfatning av en funksjon er nært knyttet til en formel, en graf og en tabell. Vår erfaring er at mange elever ikke tenker på en funksjon som en tilordning eller avbildning fra en mengde (for våre elever tallmengde) inn i en annen. Hvorfor kan vi ikke introdusere en funksjon som en tilordning eller avbildning allerede på ungdomstrinnet?

Nedenfor følger en mulig introduksjon til funksjoner. Vi foreslår at dette kan gjøres med elever i videregående skole, selv om de skal kjenne funksjonsbegrepet godt fra ungdomstrinnet.

Enkelte elever er ikke fortrolig med notasjonen $f(x)$. De er vant til å skrive $y = x^2 - 1$ istedenfor $f(x) = x^2 - 1$. Når vi skal se på sammensatte funksjoner og omvendte funksjoner, er det nødvendig å bruke notasjonen $f(x)$. I videregående skole kan man definere begrepet funksjon omtrent som følger:

> *En funksjon er en tilordning, eller en regel, som tar et tall i en tallmengde (definisjonsmengden) og tilordner ett bestemt tall i den samme, eller en annen, tallmengde. Mengden av funksjonsverdier kalles verdimengden til funksjonen.*

Noen ganger kan regelen eller tilordningen skrives som en formel. La for eksempel f være funksjonen som dobler tallene i definisjonsmengden. Hvis definisjonsmengden er $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, får vi funksjonsverdiene

$$\begin{array}{lll} f(-1) = -2 & f(1) = 2 & f(3) = 6 \\ f(0) = 0 & f(2) = 4 & f(4) = 8 \end{array}$$

Dermed er verdimengden $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.
Vi kan skrive funksjonen med en formel: $f(x) = 2x$

La elevene velge definisjonsmengde og funksjon, beskrive den med ord og eventuelt formel og beregne verdimengden.

Hvis funksjonen g legger 4 til tallene, kan vi sette sammen funksjonene f og g. Hvis vi først anvender f og deretter g, får vi for eksempel

$$3 \xrightarrow[\cdot 2]{f} 6 \xrightarrow[+4]{g} 10$$

der f tar 3 til 6, og g tar 6 til 10.
Vis elevene notasjonen $g(f(3)) = g(6) = 10$.
La elevene finne $g(f(x))$ for de andre tallene i definisjonsmengden til f.
Kan vi lage en formel for $g(f(x))$?
Utfordre elevene: Hva skjer hvis vi først bruker g, og deretter f?

Vi utvider f og g slik at definisjonsmengden til begge funksjonene er alle reelle tall. Hva blir formelen for $g(f(x))$?

La elevene lage sammensatte funksjoner selv. De kan også øve seg i å dele opp en sammensatt funksjon i en serie av funksjoner. Hvordan kan funksjonen gitt ved $f(x) = e^{3x}$ ses på som en sammensatt funksjon?

Skriv gjerne slik:

$$f\colon x \rightarrow 3x \rightarrow e^{3x}$$

Da er f satt sammen av funksjonene gitt ved $g(x) = 3x$ og $h(x) = e^x$, slik at $h(g(x)) = h(3x) = e^{3x} = f(x)$.

Skriv funksjonene nedenfor som sammensatte funksjoner:

1) $f(x) = 2 + 3e^x$
2) $r(x) = \sin(2x + 3)$
3) $t(x) = \cos^2(4x)$
4) $k(x) = \sin^2(h(x))$

Å jobbe med sammensatte funksjoner på denne måten vil hjelpe elevene når de for eksempel skal bruke kjerneregelen for derivasjon. Det vil da kunne være lettere for dem å se hva som er kjernen, og om funksjonen kan ses på som sammensatt av to eller flere funksjoner.

Kalkulusoppgavene 12 og 1 fra TIMSS Advanced 2015 (figur 11.12 og 11.13) kan innarbeides i forbindelse med dette. For mer om disse oppgavene, se kapittel 9. I disse oppgavene kan elevene også finne ut hvilke funksjoner funksjonen som skal deriveres er satt sammen av.

Figur 11.12 Kalkulusoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015.

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

Ⓐ $2\sin(h(x))h'(x)$

Ⓑ $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

Ⓒ $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

Ⓓ $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

Figur 11.13 Kalkulusoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Funksjonen f er definert ved $f(x)=e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

Ⓐ e^{x^2}

Ⓑ e^{2x}

Ⓒ $2xe^{x^2}$

Ⓓ $e^{x^2}+2x$

Ⓔ $2e^{2x^3}$

Omvendte funksjoner

Det er mulig å ta sammensatte funksjoner litt videre og introdusere omvendte funksjoner. Det kan gjøres enkelt og intuitivt i starten hvis elevene har blitt introdusert for sammensatte funksjoner. Her foreslår vi en liten introduksjon:

Hvis f er funksjonen som dobler et tall, vil den omvendte funksjonen f^{-1} halvere tallet.

Vi skriver $f(x) = 2x$ og $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Da er $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{2x}{2} = x$ og $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

Når vi setter sammen en funksjon og dens omvendte funksjon og bruker denne sammensatte funksjonen på et tall x, kommer vi «tilbake til start», dvs. til tallet x vi startet med.

Elevene kan videre diskutere om alle funksjoner har en omvendt funksjon, og prøve å finne ut hvordan de kan finne uttrykket til den omvendte funksjonen f^{-1} fra funksjonsuttrykket til f.

Elevene kan også framstille både sammensatte og omvendte funksjoner grafisk. Dette kan kobles til undervisningsskisse 1 om transformasjon av funksjoner.

Undervisningsskisse 7

Tema: Kontinuitet og grenseverdier

I denne undervisningsskissen har vi latt oss inspirere av tre oppgaver fra TIMSS Advanced 2015. Det er kalkulusoppgavene 9, 10 og 11 (figur 11.14, 11.15 og 11.16), som man kan lese mer om i kapittel 9. Disse oppgavene kan innarbeides i diskusjonsoppgavene vi skisserer her.

Hvis vi ser på resultatene på disse oppgavene (se kapittel 9), er det få norske elever som klarer de to første, men mange får til den siste. Det kan se ut til at begrepene kontinuitet og grenseverdi, som er grunnleggende begreper i funksjonslære, ikke er særlig godt forstått av norske elever. Elevene har lært at i en brøk der telleren er konstant og nevneren «går mot uendelig», vil brøken «gå mot 0». Hvorfor får de ikke til den første grenseverdioppgaven? Vi tror noe av svaret ligger i at det ikke brukes nok tid på dette, og at elevene ikke har fått reflektere så mye over eksempler på uttrykk der grenseverdiene er overraskende. De har heller ikke sett eksempler på funksjoner som er diskontinuerlige overalt, eller som ser annerledes ut enn de «vanlige» funksjonene som er kontinuerlige overalt der de er definert.

Figur 11.14 Kalkulusoppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - a}{ax^2 + 2x}$, der $a \neq 0$.

Ⓐ $\frac{1}{a}$

Ⓑ $-\frac{a}{a+2}$

Ⓒ ∞

Ⓓ 0

Figur 11.15 Kalkulusoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

Begrunn svaret.

Figur 11.16 Kalkulusoppgave 11 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn $\lim_{x\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}$

Ⓐ -2

Ⓑ 0

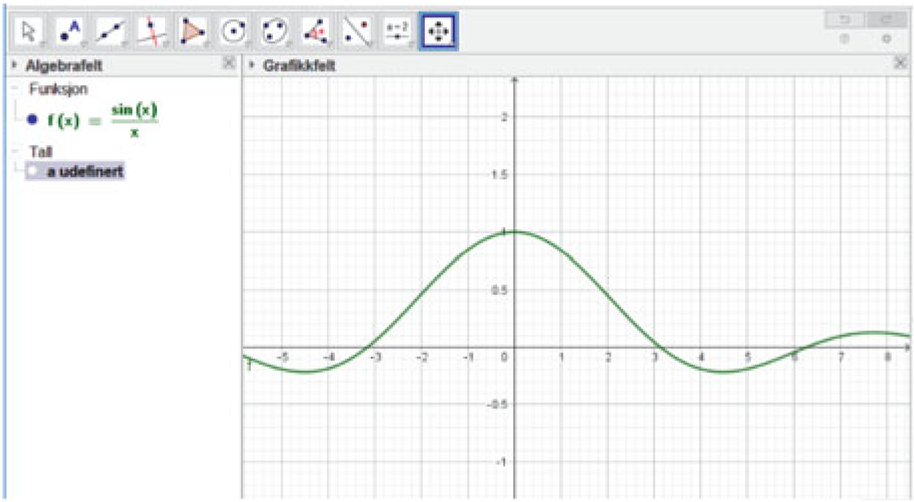
Ⓒ $\frac{1}{4}$

Ⓓ 4

Den formelle definisjonen av grenseverdi og kontinuitet går ut over pensum i videregående skole, og vi mener ikke at elevene skal bli fortrolige med såkalte epsilon–delta-argumenter, men de kan få en viss forståelse av ideene bak. For mer om dette, se kapittel 12. De kan også få se eksempler på spennende funksjoner, rekker som divergerer selv om det går sakte, og rekker som konvergerer. Vi vil nå gi noen forslag til diskusjonsoppgaver rundt disse temaene.

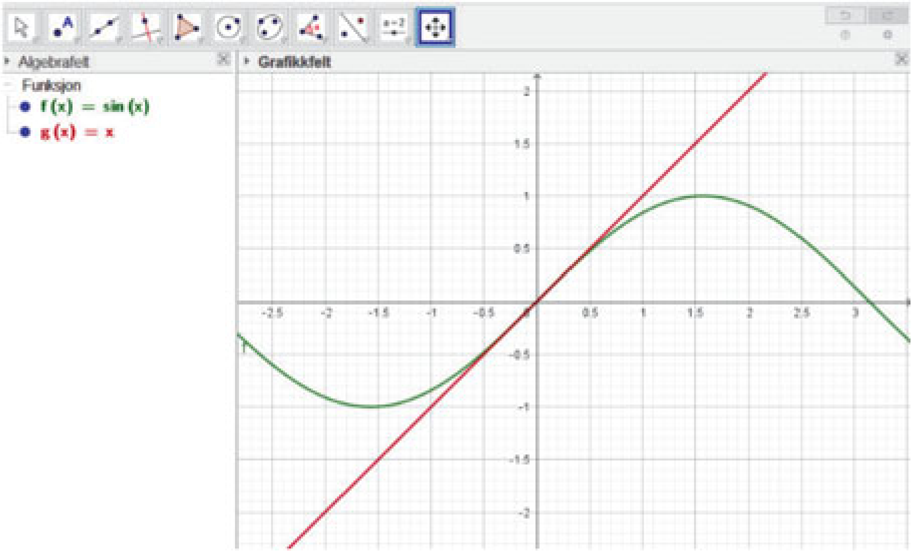
Elevene kan for eksempel se på funksjonen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. De kan tegne grafen til f i GeoGebra, forstørre og gjette hva grenseverdien $f(x)$ er. Dette gir et eksempel på et «nullnultedels-/null-over-null-uttrykk» som har en grenseverdi. I figur 11.17 har vi tegnet grafen til f i et passende intervall rundt 0. Der det står «a udefinert» i algebrafeltet, har vi spurt GeoGebra om funksjonsverdien $f(0)$. Selv om det kan se ut til at f er definert for $x = 0$ ut fra tegningen, er den ikke det.

Figur 11.17 GeoGebra-utsnitt til funksjonen $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



Elevene kan også tegne inn funksjonene $\sin x$ og x i samme koordinatsystem, forstørre og se at de to grafene er nesten sammenfallende i nærheten av origo, men begge er 0 i origo. Vi har gjort dette i figur 11.18. Dette er verdt å snakke med elevene om, da dette er en nyttig grenseverdi å jobbe med.

Figur 11.18 GeoGebra-utsnitt: Grafene til funksjonene sin x og x i et passende intervall rundt 0.



Elevene kan også få diskutere funksjonen f gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ når } x \text{ er rasjonal} \\ -1 \text{ når } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

Hvordan ser grafen til denne funksjonen ut?

Uansett hvor lite intervall vi velger, vil grafen «hoppe» mellom verdiene -1 og 1. Dette er et eksempel på en funksjon som er diskontinuerlig i alle punkter.

Når det gjelder grenseverdier, kan det være interessant og nyttig for elevene å se på den harmoniske rekken:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Kan denne summen bli så stor vi bare vil?

Vi tror elevene kan være med på beviset for at summen går mot uendelig. Det berømte beviset til Nicole Oresme er ikke så vanskelig, og elevene kan synes det er spennende.

Beviset går ut på å samle ett, to, fire, åtte, seksten ledd og så videre, og sammenlikne med en mindre rekke, slik:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty$$

Når den mindre rekken divergerer, må den harmoniske rekken også divergere, dvs. at summen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+L$ kan bli så stor vi bare vil.

For elevene kan det oppleves som overraskende at den harmoniske rekken divergerer, når den uendelig geometriske rekken nedenfor konvergerer.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

Det kan virke motiverende for elevene å undre seg og bli kjent med eksempler der ikke alt er slik en skulle tro.

11.3 Bruk av oppgaver fra TIMSS Advanced i grunnskolen og ved starten av videregående skole

Noen av oppgavene som elevene fikk i TIMSS Advanced 2015, vil kunne løses av elever allerede på ungdomstrinnet eller ved starten av videregående skole. Vi vil her gi noen eksempler på slike oppgaver, og på hvordan de kan brukes. Motivasjon er viktig for læring, og når elevene opplever mestring, blir de mer motivert. Opplevelse av mestring henger sammen med oppgavens vanskegrad. Både for enkle og for vanskelige oppgaver kan virke mot sin hensikt.

Hvis flinke elever ikke får utfordringer som er tilpasset deres nivå, er det en fare for at de vil oppleve faget som lite spennende og interessant. (For mer om dette, se kapittel 7.) Noen, kanskje mange, elever vil kunne klare oppgaver som er beregnet på høyere alderstrinn. I dette avsnittet har vi forslag til oppgaver fra TIMSS Advanced 2015 som kan presenteres for elever på ungdomstrinnet eller i Matematikk 1T.

Etter at elevene har jobbet med oppgaven, kan man informere dem om at dette er en oppgave som er brukt i en internasjonal test for elever med full fordypning i slutten av videregående skole. At en elev greier å løse en oppgave som mange elever flere klassetrinn over sliter med, kan ha en innvirkning på elevens læring.

Det vi skriver her, er bare ideer til hvordan man kan bruke oppgavene, det er ikke svaret på hvordan det bør gjøres. Men mer variasjon i oppgavene som gis, og diskusjon med elever om løsning av oppgaver, kan bidra til økt læring. Vi har sett i tidligere internasjonale studier for grunnskole og videregående skole at man i Norge i mindre grad enn i en del andre land har lagt opp til diskusjoner og drøftinger i klassen (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). Vi ser imidlertid tegn på at dette er i ferd med å endre seg, og vi vil her gi flere eksempler som kan brukes til diskusjon og drøfting.

Undervisningsskisse 8

Tema: Pytagoras' setning og 30–60–90-graders trekanter

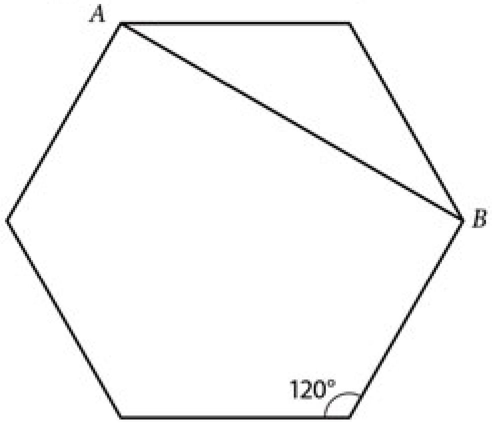
I denne undervisningsskissen foreslår vi å bruke geometrioppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015 i undervisningen, se figur 11.19.

De fleste elevene i TIMSS Advanced i Norge løste denne oppgaven ved bruk av trigonometri, noe elevene ikke lærer i grunnskolen. Det interessante er at det er vel så enkelt å løse oppgaven uten å bruke trigonometri. Oppgaven kan løses ved å nedfelle høyden fra toppunktet i den angitte trekanten og bruke at i en trekant med vinkler 30°, 60° og 90° er lengden av den minste kateten lik halve lengden av hypotenusen. Bruker man deretter Pytagoras, som er lærestoff både på ungdomstrinnet og i 1T ved starten av videregående skole, får man at avstanden fra der den nedfelte høyden treffer grunnlinjen og ut til punkt B (eller A) er $\sqrt{3}$, så vi får avstanden $AB = 2\sqrt{3}$. Se kapittel 10 for mer om denne oppgaven.

Hvis oppgaven gis til elever i ungdomstrinnet, gir den utfordringer til talentfulle elever. Samtidig er ikke oppgaven vanskeligere enn at mange av elevene i grunnskolen vil kunne lære en del av å jobbe med den. Etter at elevene har jobbet med oppgaven, kan man informere demom at dette er en oppgave som er brukt i en internasjonal test for elever med full fordypning i slutten av videregående skole. Dette kan i seg selv virke motiverende.

Figur 11.19 Geometrioppgave 9 fra TIMSS Advanced 2015.

En regulær sekskant med sidelengde 2 er vist.



Hva er lengden av linjestykket *AB*?

Vis framgangsmåten.

Man kan også fortelle elevene at det bare var 8 % av de norske elevene i R2 som brukte metoden ovenfor til å løse oppgaven, mens 30 % løste den ved bruk av trigonometri, en metode som er vel så komplisert. Det kan se ut til at elever tenderer mot å velge de mest avanserte metodene (som de nylig har lært), men en strategi hvor man bruker litt mer tid på å studere oppgaven og vurdere hvordan den kan løses, kan være vel så effektiv. Ulike løsningsstrategier er også noe man kan snakke med elevene om.

Undervisningsskisse 9

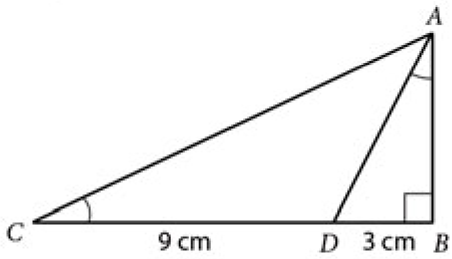
Tema: Formlike trekanter – beregning av sider

Vi vil i denne undervisningsskissen se på hvordan man kan bruke geometrioppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015 i undervisningen. Se figur 11.20.

Dette er en oppgave som kan løses ved bruk av formlike trekanter, der den store trekanten ABC er formlik med den mindre trekanten ABD. Allerede på

Figur 11.20 Geometrioppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

På figuren under er trekanten ABC rettvinklet, og vinkel ACB er lik vinkel DAB.



Hvis $CD = 9$ cm og $DB = 3$ cm, finn lengden til AB.

Svar: ________________ cm

ungdomstrinnet møter elevene oppgaver hvor de skal beregne lengden på sider i en trekant ved bruk av formlikhet. Dette er også sentralt lærestoff i 1T og R1.

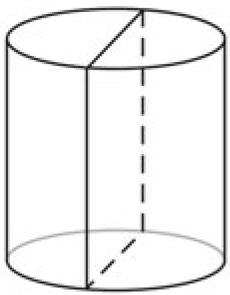
Hvis elevene finner de samsvarende vinklene, og setter opp forholdet $\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{AB}$, kan de klare å finne $AB = 6$ cm. Se kapittel 10 for mer om løsning av oppgaven. Selv om den kan løses ved å bruke formlikhet, noe som er pensum allerede på ungdomstrinnet, er den nok noe utfordrende. Det er ikke uten grunn at den er kategorisert kognitivt som resonnering i TIMSS Advanced. Utfordringen ligger antagelig i det at man må analysere nøye hvilke opplysninger man har, og hvordan man best kan angripe problemet, *før man går i gang* med å løse oppgaven. Men nettopp det å diskutere strategien for å løse en slik oppgave, kan være et godt utgangspunkt for læring. Som det påpekes i kapittel 10 om oppgaven, er dette en oppgave som ligger godt til rette for diskusjoner både i smågrupper og i full klasse. Man kan også ta opp ulike feilsvar og drøfte disse med elevene. At en del elever feilaktig får svaret $\sqrt{27}$, kan for eksempel være fordi de har prøvd å løse oppgaven ved bruk av formlike trekanter, men feilaktig har brukt lengden 9 istedenfor 12. Det å forstå andres feil kan også være en måte å øke den matematiske forståelsen på.

Undervisningsskisse 10

Tema: Geometri og funksjoner – maksimering ved bruk av GeoGebra

I denne undervisningsskissen har vi latt oss inspirere av kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015. Se figur 11.21.

Figur 11.21 Kalkulusoppgave 2 fra TIMSS Advanced 2015.



Snittflata mellom ein sylinder og eit plan gjennom aksen til sylinderen er eit rektangel med omkrins lik 6 m. Radien til ein sylinder som tilfredsstiller dette vilkåret og som har størst mogleg volum, er

A 2,5 m

B 2 m

C 1,5 m

D 1 m

E 0,5 m

Dette er en oppgave som må løses i flere trinn. Se kapittel 9 for mer om denne oppgaven. Flertrinnsoppgaver faller generelt vanskelig for elever. R2-elever kan løse oppgaven ved å sette opp et funksjonsuttrykk for volumet uttrykt ved radius og høyde i sylinderen, for deretter å derivere uttrykket med hensyn på radius og sette den deriverte lik 0 for å finne maksimumsverdien.

Elever på ungdomstrinnet har ikke lært om derivasjon, og de kan derfor ikke løse oppgaven på denne måten. Men de kan løse den på en alternativ måte. Elevene på ungdomstrinnet har kunnskap slik at de kan sette opp et uttrykk for volumet av sylinderen som funksjon av radius. Deretter kan de bruke GeoGebra, tegne inn funksjonen, og bestemme størst mulig volum med tilhørende radius ved å prøve seg fram, ev. ved hjelp av GeoGebra.

Et løsningsforslag til oppgaven kan se slik ut

Vi bestemmer høyden ved å bruke at omkretsen til rektangelet er 6:

$$2h + 4r = 6$$
$$h = \frac{6 - 4r}{2}$$

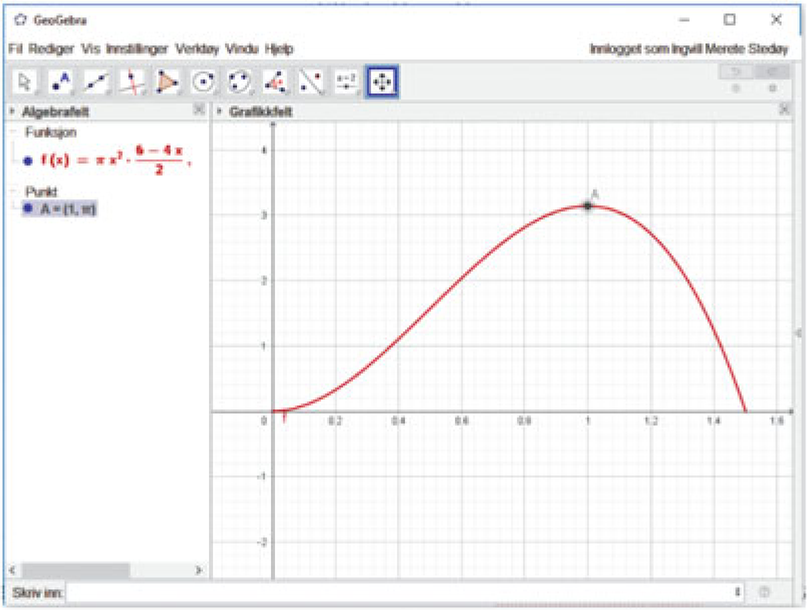
Sylinderens volum V som funksjon av radiusen r er da gitt ved:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{6 - 4r}{2}$$

Vi bruker GeoGebra til å tegne grafen til V. Vi må da skrive x istedenfor r, og velge kommandoen Funksjon(Funksjon>, <Start>, <Slutt>), med $\pi * x^2 * (6 - 4x)/2$ for funksjonen. Start er 0, og slutt er $3/2$. Så brukes kommandoen Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>) for å finne maksimum. Her skriver vi f for Funksjon, 0 for Start og 3/2 for Slutt. Figur 11.22 viser grafen til V.

Punktet A i figur 11.22 viser at volumet er størst når radiusen i sylinderen er 1. Da er volumet lik π. Det kan elevene også finne ut ved å sette inn $r = 1$ i volumfunksjonen som de fant før de tok i bruk GeoGebra. Elevene kan også utfordres til å prøve seg fram uten bruk av GeoGebra først.

Figur 11.22 Grafen til volumfunksjonen i undervisningsskisse 9.



Også dette er en oppgave som i utgangspunktet ligger utenfor det elevene har lært på ungdomstrinnet, men hvor de f.eks. ved hjelp av programmet GeoGebra kan løse den. Oppgaven er utfordrende – det var den også for elevene i videregående skole – fordi den krever at de analyserer og planlegger løsningen i flere trinn. Samtidig erfarer elevene at det å sette opp funksjonsuttrykket, noe som i seg selv er utfordrende, er en forutsetning for å kunne bruke GeoGebra i denne oppgaven.

Undervisningsskisse 11

Tema: Algebra – forståelse av kvadratsetninger

I denne undervisningsskissen har vi tatt utgangspunkt i algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015. Se figur 11.23.

Figur 11.23 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓑ $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Ⓒ $\frac{1}{x - y}$

Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x^2 - y^2}$

En av de utfordringene man står overfor i skolen, er problematikken rundt differensiering, ikke minst gjelder det elever med talent eller spesiell interesse for matematikk. For mer om dette, se kapittel 7. Høyt presterende elever kan med fordel få mer avanserte oppgaver enn det som er vanlig for ungdomstrinnet. Arbeid med kvadratsetningene er en del av pensumet på ungdomstrinnet, men det har for eksempel ikke de siste årene vært vektlagt å utvide brøker med kvadratrøtter i nevneren. For dyktige elever kan det å jobbe med slike problemstillinger være en måte å gi dem mer utfordringer på. Nedenfor viser vi noen eksempler på en type oppgaver elevene kan jobbe med som en innfallsvinkel til å løse algebraoppgaven i figur 11.23. For mer om denne oppgaven, inkludert løsning, se kapittel 8.

En mulig innfallsvinkel kan være å starte med å vise elevene noen eksempler av typen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

og diskutere med elevene hvorfor dette blir riktig. Be dem gjerne gjøre flere liknende oppgaver, også med bokstavuttrykk. Når de behersker dette rimelig godt, kan man for eksempel se på en oppgave av typen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Her kan man utfordre elevene til å forklare *hvorfor* dette blir riktig. Man kan så la elevene gjøre flere liknende oppgaver med bruk av konjugatsetningen, også med bokstavuttrykk. Før elevene prøver seg på TIMSS Advanced-oppgaven i figur 11.23 kan de for eksempel se på følgende oppgave:

$$\frac{a}{\sqrt{a}+2} = \frac{a \cdot (\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{a(\sqrt{a}-2)}{a-4}$$

I et opplegg som det vi har skissert her, ligger det også til rette for å la elevene reflektere og diskutere mer generelt rundt potenser og kvadratrøtter.

Undervisningsskisse 12

Tema: Algebra – å lete etter tallmønster

I denne undervisningsskissen foreslår vi en variasjon til arbeidet med mønstergjenkjenning. I matematikk er det å lete etter og oppdage mønstre en av nøklene til å forstå og se sammenhenger i faget. Å lete etter mønstre er noe elevene kan øve på fra barnetrinnet og oppover. I læreplanen for grunnskolen finner vi følgende formulering etter 7. trinn: Elevene skal «utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar» (KD, 2006). Mange lærebøker legger opp til mønstergjenkjenning, men det er mye fokus på figurtall. Arbeidet med mønster kan varieres mer enn det gjøres i dag. Det er ingenting i veien for å starte med tallfølger og rekker tidlig på barnetrinnet.

Hvis man legger inn en litt myk start, kan algebraoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015 (figur 11.24) brukes til å utfordre elevene på ungdomstrinnet.

Figur 11.24 Algebraoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

Finn verdien til det algebraiske uttrykket

$$x - 2x + 3x - 4x + \ldots + 99x - 100x$$

når $x = 3$.

Svar: ______________

Dette er en oppgave hvor elevene selv må resonnere seg fram til mønsteret i en alternerende rekke av algebraiske uttrykk. Selv R2-elevene har ingen formel de kan bruke for å løse den. Oppgaven stiller derfor krav til det vi kan kalle abstrakt resonnering og mønstergjenkjenning. For mer om oppgaven og hvordan norske R2-elever presterte på den, se kapittel 8. Å prøve å løse oppgaven ved å regne ut summen direkte er en lite farbar vei.

Forslag til start på undervisningsopplegg

Utfordre elevene til å finne de neste leddene i tallfølgene:

1. 1, 2, 4, 6, 8, ...
2. 1, 6, 11, 16, ...
3. 1, 4, 9, 16, ...
4. x, $2x$, $3x$, $4x$, ...
5. x, x^3, x^5, x^7, ...

Lag gjerne flere oppgaver, og utfordre elevene til å lage egne mønstre. Når elevene har arbeidet en del med tallfølger, kan man introdusere rekker. Da er poenget å beregne summen, eller verdien av rekken. Oppgavene nedenfor kan fungere som øvingsoppgaver.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$
b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 30 =$
c) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 =$
d) $1 + 3 =$
e) $1 + 3 + 5 =$

f) $1 + 3 + 5 + 7 =$
g) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
h) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 27 =$
i) $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x + 9x + 10x =$

Se om elevene klarer å finne en metode for å beregne det n-te leddet til rekkene i oppgave a, c, h og i.

Etter dette kan elevene prøve å bestemme verdien av alternerende rekker. Bruk for eksempel:

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 =$

Ser elevene at to og to ledd blir -1 til sammen, slik at svaret blir -5? Neste utfordring kan være å ta med flere ledd.

b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 49 - 50 =$
c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 99 - 100 =$

Nå er ikke veien lang til TIMSS Advanced-oppgaven i figur 11.24. Hvis de først finner verdien av 10 ledd, kan de gå videre til 50 ledd, og ende opp med å løse oppgaven fra TIMSS Advanced.

d) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - 6x + 7x - 8x + 9x - 10x =$

Hva blir verdien når $x = 1$? Observer om elevene ser at de er tilbake i oppgave a.

Nå kan elevene prøve seg på oppgavene nedenfor.

A) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - \ldots + 49x - 50x =$
B) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - \ldots + 99x - 100x =$

Kanskje noen finner andre gode måter å gjøre det på.

La elevene diskutere ulike strategier. Be elevene beregne verdien av uttrykket i oppgave A og B når $x = 1$, når $x = 8$, når $x = 250$. Diskuter hvorfor det kan være en fordel å beregne verdien til rekkene generelt, og så kunne sette inn ulike verdier av x til slutt.

Nå kan dere lage liknende oppgaver. For eksempel:

$$2x - 4x + 6x - 8x + \ldots 18x - 20x =$$

Elevene kan lete etter ledd som «slår hverandre ut», og beregne verdien av uttrykket for ulike verdier av x.

La elevene diskutere hvordan leting etter mønstre kan bidra til å gjøre arbeidet med å løse et problem enklere.

Elevene kan få vite at rundt 20 % av R2-elevene fikk til oppgaven i figur 11.24. Rundt 10 % av et årskull av norske elever tar R2, og det betyr at rundt 2 % av hele årskullet klarer oppgaven. Hvis elever på ungdomstrinnet har arbeidet seg fram til en måte å løse den på, har de fått en erfaring av hvordan det å lete etter mønstre kan hjelpe dem til å løse matematikkoppgaver på et langt høyere nivå enn det de har lært regler for.

11.4 Avsluttende kommentarer

I de to foregående delkapitlene har vi presentert en samling undervisningsskisser og skolerelaterte eksempler basert på oppgaver fra TIMSS Advanced 2015. Listen er naturligvis ikke uttømmende, vårt formål er å eksemplifisere potensialet som ligger i å koble oppgavemateriale fra TIMSS Advanced til praktisk arbeid med undervisning i skolen.

I kapittel 13 diskuteres relevansen av TIMSS Advanced for læreplanrevisjonen («fagfornyelsen») som i øyeblikket pågår i Norge. Basert på erfaringer med stoff innenfor de emneområdene vi har berørt her, mener vi at det er viktig å ta en debatt blant annet om stoffrekkefølgen i matematikkursene man skal ha i videregående skole. Ønsker man dybdelæring, er det viktig å unngå fragmentering. (Se også delkapittel 5.3.)

KAPITTEL 12

Et universitetsperspektiv på matematikk i TIMSS Advanced

Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Det er viktig at skolematematikken gir elevene grunnlaget de trenger for videre studier. Elevene i videregående skole som testes i TIMSS Advanced tar matematikk for realfag «til topps» med faget Matematikk R2 (heretter: R2) – et programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering. Resultatene fra TIMSS Advanced vil således kunne si noe om forkunnskapene i matematikk for begynnerstudentene på universiteter og høgskoler (heretter: UH-sektoren). Informasjon om dette er verdifullt grunnlagsmateriale for arbeid med å hjelpe elevene i overgangen fra skole til høyere utdanning innen matematikktunge fag.

Sjangermessig er dette kapitlet noe annerledes enn de fleste av denne bokens kapitler. Begge forfatterne har i mange år arbeidet med undervisning på begynnerkurs i matematikk ved universiteter og høgskoler, kurs som bygger på R2. De vinklingene og eksemplene vi gir, er naturligvis preget av vår egen erfaringsbakgrunn. Uvegerlig baserer vi oss på vårt eget bilde av matematikkmiljøet innen de aktuelle delene av UH-sektoren. De aktuelle delene er i vår sammenheng tilbydere av matematikktunge studieveier, studieveier som innholdsmessig bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole. Typiske eksempler er studieprogrammer innen realfag og teknologi.

Som vårt primære eksempel skal vi i dette kapitlet bruke begynneremnet MAT1100 ved Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet (MN), Universitetet i Oslo (UiO). I delkapittel 12.2 skal vi eksemplifisere hvordan sviktende bakgrunnskunnskaper fra videregående skoles matematikk slår ut blant studenter som strøk på avsluttende eksamen i dette emnet høsten 2015. I delkapittel 12.3 skal vi diskutere et utvalg oppgaver fra TIMSS Advanced i et UH-perspektiv. Her skal vi blant annet sammenlikne med en konkret oppgave gitt til eksamen i kurset MAT1100.

12.1 Overgangsproblemene

Det er vel kjent og mye diskutert at mange elever møter store utfordringer i overgangen mellom videregående skole og universitet og høgskole, og spesielt i matematikk. Matematikkundersøkelsen til Universitets- og høgskolerådet (UHR, 2014) er en av indikatorene på dette. En ting begynnerstudenter i matematikk trekker fram som en utfordring er uvant notasjon og symbolbruk (UHR, 2014). I formålet for programfag i matematikk for realfag står det: «Arbeid med programfaget skal gi en innføring i logisk og analytisk tankegang med vekt på matematisk argumentasjon og framstillingsform» (KD, 2006). Å bli fortrolig med matematisk skrivemåte og tankegang tar tid. Det er dermed viktig å eksponere elevene for dette, og at de lærer å bruke det aktivt. Samtidig er det viktig å være klar over at elevene kun får en innføring i skolen og at studentene derfor trenger repetisjon og klargjøring når de kommer til videre studier.

Utgangspunktet elevene har med seg fra skolematematikken er gitt av kompetansemålene i læreplanen. For elevene som deltar i TIMSS Advanced har matematikk vært et gjennomgående fag i hele skoleperioden – fra 1. til 13. trinn, et fag der kunnskaper og ferdigheter bygger på hverandre i stadig større kompleksitet. Dette grunnlaget skal elevene bygge videre på i sine studier. Den hierarkiske oppbyggingen av faget gjør at utfordringer som ikke løses underveis vil forplante seg. Hvis studentene har svake forkunnskaper i matematikk, vil det derfor være vanskelig å bøte på disse i videre studier.

Ulike utredninger og rapporter snakker i skrivende stund varmt om *dybdelæring* (NOU, 2015). Dybdelæring innebærer at man må *prioritere* for å få tid til å gå i dybden på *sentrale temaer*. Kombinert med en god progresjon gjennom skoleløpet knyttet til disse sentrale temaene er det rimelig å tro at økt dybdelæring vil bidra til å gi elevene et bedre grunnlag for videre studier. Et argument for dette er at overgangsproblemene elevene opplever, erfaringsmessig ikke er knyttet til hele spekteret av matematiske temaer som behandles i videregående skole. Ofte er det, som vi skal se et eksempel på i delkapittel 12.3, kompetanse innen grunnleggende temaer som *tall* og *algebra* som er mangelfull. Nettopp slike grunnleggende temaer i faget, «kjerneelementer», er framme i diskusjonen. Det gjenstår imidlertid å se om fagfornyelsen som det akkurat nå arbeides med i Norge, faktisk vil leve opp til prinsippene om dybdelæring og prioritering av fagets kjerneelementer.

12.2 Bakgrunnskunnskaper og universitetsmatematikk

I dette delkapitlet skal vi beskrive en studie som eksemplifiserer at problemer med matematikk på universitetsnivå ofte ikke skyldes manglende innlæring av det nye stoffet, men derimot manglende kompetanse vedrørende stoff som antas kjent fra videregående skole. I denne studien gjennomgår vi et knippe utvalgte oppgaver i eksamensbesvarelsene til de kandidatene som fikk karakteren F – stryk – i begynneremnet *MAT1100 – Kalkulus* ved UiO høsten 2015. Dette er det første matematikkemnet som møter studentene som begynner på realfagsstudier ved UiO, og innholdsmessig bygger emnet på matematikken elevene skal ha lært i R2. Studentene som tok eksamen høsten 2015 er typisk hentet fra populasjonen som ble testet i TIMSS Advanced våren 2015, da de var elever på R2.

Avsluttende eksamen i MAT1100 bestod av to deler: en del med flervalgsoppgaver som gav maksimalt 30 poeng og en del med åpne oppgaver som gav maksimalt 70 poeng. Studentene hadde også en midtveiseksamen som gav maksimalt 50 poeng. Midtveiseksamen telte 1/3 og avsluttende eksamen telte 2/3 ved fastsettelse av karakter. Karakteren fastsettes på bakgrunn av total skår og en helhetsvurdering i etterkant av avsluttende eksamen. Karakteren F gis normalt ved 0–39 % skår (NMR, 2003).

Høsten 2015 tok 499 kandidater avsluttende eksamen i MAT1100. Av disse fikk 98 kandidater karakteren F. Resultatene på denne eksamen var for øvrig ikke spesielt dårlige. Vi ønsket å se om vi kunne finne noen fellestrekk ved prestasjonene til strykkandidatene. Spesielt ønsket vi å undersøke om bakgrunnskunnskaper fra skolematematikken spiller inn når det gjelder stryk på introduksjonskurs på universitetsnivå. Vi gjennomgikk besvarelsene til 91 av kandidatene som fikk karakteren F på emnet som helhet. De resterende 7 besvarelsene fant vi ikke, men det er liten grunn til å tro at disse ville ha endret konklusjonene våre i nevneverdig grad.

På den første eksamensoppgaven i del 2 med åpne oppgaver kunne man oppnå maksimalt 20 poeng (se figur 12.1).

Figur 12.1 Oppgavetekst til den første oppgaven i del 2 med åpne oppgaver, eksamen MAT1100 høsten 2015.

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Finn reelle tall k og r slik at vi for alle reelle tall x har

$$x^2 + 8x + 20 = r\left[\left(\frac{x+k}{\sqrt{r}}\right)^2 + 1\right],$$

og bruk dette til å beregne integralet

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Hint: Hvis $m > 1$ er et helt tall, kan du bruke formelen

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)}\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int \frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}.$$

b) (10 poeng) Beregn integralet

$$\int \frac{x+5}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Oppgaven omhandler en antiderivasjonsteknikk som er delvis kjent for studentene fra videregående skole. En enklere variant av teknikken, som kalles delbrøkoppspalting, er et tema i læreplanen i R2. Et av kompetansemålene under temaet Funksjoner etter R2 (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon*

Eksamensoppgaven involverer også stoff som elevene lærer tidligere i skoleløpet (Matematikk 10. trinn og Matematikk 1T), og som handler om algebrakunnskaper. Et av kompetansemålene under temaet Tal og algebra etter 1T (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *rekne med rotuttrykk, potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat*

To av kompetansemålene i temaet Tal og algebra etter 10. trinn (KD, 2006) er at eleven skal kunne

- *bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar*
- *behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane*

Den første delen av oppgave 11a kobler seg på disse bakgrunnskunnskapene. Oppgaven kan løses ved «å sammenlikne koeffisienter» i algebraiske uttrykk (se figur 12.2).

Figur 12.2 Løsningsforslag til første del av oppgave 11a (oppgavetekst i figur 12.1).

Løsningsforslag 11a, alternativ 1, "sammenligne koeffisienter":

$$
\begin{aligned}
& r\left[\left(\tfrac{x+k}{\sqrt{r}}\right)^2+1\right] && \text{Skriver ut potensen} \\
= \; & r\left[\tfrac{(x+k)(x+k)}{\sqrt{r}\sqrt{r}}+1\right] && \text{Ganger ut parenteser og kvadratrøtter} \\
= \; & r\left[\tfrac{x^2+2kx+k^2}{r}+1\right] && \text{Ganger inn } r \\
= \; & x^2+\underbrace{2k}_{=8}x+\underbrace{k^2+r}_{=20} && \text{Sammenligner med } x^2+8x+20
\end{aligned}
$$

Likningen $2k = 8$ gir $\underline{k = 4}$, og likningen $k^2 + r = 20$ gir dermed $\underline{r = 4}$.

Denne løsningsmetoden ligger klart innenfor dagens pensum i Matematikk 1T, og bortsett fra kvadratrottegnet ligger også selve regningen i prinsippet innenfor ungdomstrinnspensum. At studenter ved et universitetskurs for realfagstudenter ikke klarer å løse oppgaven, eksemplifiserer dermed problemet med sviktende bakgrunnskunnskaper i algebra for studenter ved denne typen kurs.

Eventuelt kan oppgave 11a løses ved å bruke teknikken «å fullføre kvadratet» (se figur 12.3).

Figur 12.3 Løsningsforslag til første del av oppgave 11a (oppgavetekst i figur 12.1).

Løsningsforslag 11a, alternativ 2, "fullføre kvadratet":

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 8x + 20 \\
= \; & \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2}_{\text{fullstendig kvadrat}} - 4^2 + 20 \\
= \; & (x+4)^2 + 4 \\
= \; & 4\left[\left(\frac{x+4}{\sqrt{4}}\right)^2 + 1\right]
\end{aligned}
$$

Så $\underline{k = 4}$ og $\underline{r = 4}$.

Dette er en noe mer «avansert» løsningsmetode, men også denne er innenfor pensum i Matematikk 1T.

Den første delen av oppgave 11a er også en hjelp for å løse resten av oppgaven, og de kandidatene som ikke får til denne delen, får lite uttelling på resten.

Gjennomsnittskåren for de 91 strykkandidatene på oppgave 11a var 0,92 poeng (av 10). Gjennomsnittlig skår som trengs for å stå på tvers av alle eksamenskomponentene, er 4 poeng av 10. Det er 18 av de 91 strykkandidatene som får det riktige svaret $r = k = 4$ (mange ad omveier), og kun 5 av disse kandidatene får mer enn 4 poeng på oppgave 11a.

Dette peker i retning av at studentene mangler dybdekunnskap om algebraiske uttrykk. Selv om elever kan utføre teknikker på konkrete talleksempler, gjør manglende dybdekunnskap at svake elever fort kan vippes av pinnen når de møter en mer generell algebraisk form (som for eksempel i det gitte hintet i oppgaven). Resultatene fra TIMSS Advanced viser (se kapitlene 8–10) at norske elever presterer svakt når de må tenke på en litt annen måte enn den de har blitt undervist i. Denne eksamensoppgaven kan virke uvant for studentene, noe som er en indikasjon på at de trenger tid og muligheter til å gå litt ulike veier og studere matematikken på ulike måter.

Oppgave 11 (se oppgavetekst i figur 12.1) illustrerer også progresjonselementet når det gjelder «stammen» Tall – Algebra – Funksjoner i skolematematikken; for å løse integraler trenger studentene tall- og algebrakunnskaper. Denne stammen er modningsstoff, og det er vanskelig å bøte på manglende forkunnskaper for de som ikke har så godt grunnlag. Et svakt grunnlag vil videre bety at studentene har mindre energi å bruke på å lære seg nytt stoff.

Resten av del 2 i oppgavesettet til avsluttende eksamen i MAT1100 høsten 2015 besto av en oppgave (Oppgave 12) med 5 deloppgaver a–e som hver ga 10 poeng. Oppgave 12 omhandlet stoff som ikke er dekket i skolematematikken, og dreide seg om et nytt tema kalt lineær algebra. Av strykkandidatene har de fleste prøvd å besvare de tre første delspørsmålene a–c på denne, men nesten ingen har prøvd på de to siste. Et fellestrekk blant strykkandidatene er at forklaringene i deloppgave a er svake. Her skal de vise at de har forstått hvordan man kan omformulere tekst til matematikk. De fleste har gitt en begrunnelse, men svært få av begrunnelsene er holdbare. Deloppgavene b og c involverer regning som omhandler nye begreper introdusert i MAT1100, og disse er det flere av strykkandidatene som skårer mange poeng på. Dette nye stoffet forutsetter ikke modning i like stor grad som annet stoff i oppgavene.

Gjennomsnittsskåren på de tre punktene a–c om nytt stoff (der hvert punkt ga maksimalt 10 poeng) for våre 91 strykkandidater er henholdsvis 1,3, 4,0 og 4,6. Dette gir at gjennomsnittet på de tre delpunktene som omhandler stoff som ikke er dekket i skolematematikken, er 3,3 poeng. Dette er mer enn det tredobbelte av skåren på «algebrapunktet» i oppgave 11a. Så på det nye stoffet er *gjennomsnittlig skår* hos de 91 strykkandidatene nesten oppe på det nivået som kreves for å stå.

Konklusjonen er at strykkandidatene gjør det spesielt svakt på eksamensoppgaven som omhandler algebrastoff som er dekket i skolematematikken.

Studien vi beskriver her er liten, og den gir naturligvis bare et eksempel på et fenomen. Likevel illustrerer den godt det mange har erfart vedrørende begynnerkurs i matematikk på UH-nivå: Sviktende bakgrunnskunnskaper, særlig innen fagområdet algebra, er et problem. Forkunnskapstesten til Norsk matematikkråd (NMR, 2015) bekrefter dette. Fordi sviktende forståelse for et fagområde lett kan bli skjult av instrumentell innlæring av strategier for å løse oppgaver i de sjangrene elevene er vant med, er måling av kunnskaper gjennom alternative systemer av oppgavesjangre, som for eksempel de man finner i TIMSS Advanced, av stor verdi. Med slike oppgaver har man også fordelen internasjonal sammenlikning kan gi. I neste delkapittel skal vi analysere elevprestasjoner på konkrete oppgaver fra TIMSS Advanced i et universitets- og høgskoleperspektiv.

12.3 Noen UH-relevante oppgaver fra TIMSS Advanced

Som nevnt i forrige delkapittel viser TIMSS Advanced 2015 generell framgang for norske elever innen oppgavetyper som ligger nær dem elevene er vant til. Se også kapittel 8–10. Elevene framstår som dårligere forberedt når de møter uvante problemstillinger, dvs. problemer der de må tenke på en litt annen måte enn den de har blitt undervist i. Denne typen overføringsproblemer kan skape hindringer når elevene går videre til UH-nivå. Det å kunne tenke fleksibelt og løse mange ulike typer problemer er en kompetanse som vil hjelpe elevene i videre studier. Næringslivet etterspør også kandidater som kan tenke selv og «håndtere kaos». I denne sammenhengen er det relevant å måle elevers kompetanse i matematikk ved å bruke oppgaver og oppgavesjangre som ikke nødvendigvis samsvarer med de formatene elevene er vant med. Her representerer TIMSS Advanced et godt verktøy.

I dette delkapitlet vil vi bygge videre på den systematiske gjennomgangen av oppgavene fra TIMSS Advanced 2015 som er gjort tidligere i denne boken (kapittel 8, 9 og 10) og se litt nærmere på et utvalg av oppgaver som er spesielt relevante fra UH-perspektivet. Vi vil koble dette opp mot oppgaver på UH-nivå og erfaringer vi har fra å undervise begynnerstudenter i matematikk. Spesielt vil vi ta for oss begrepene *derivasjon*, *grenseverdi*, *kontinuitet* og *absoluttverdi*. Oppgavene vil ha samme navn og nummerering som i kapittel 8-10.

Hvis vi ser på «stammen» av hovedområder Tall – Algebra – Funksjoner og progresjonen i denne gjennom skolematematikken, ser vi at den på mange måter munner ut i temaet differensiallikninger i R2 (KD, 2006). Algebrakunnskaper gjør at man får større forståelse av tall, og ved å jobbe med funksjoner får man større dybdekunnskap og forståelse av algebra. Slik er det også innenfor hovedområdene i denne «stammen»: Innen temaet funksjoner vil differensiallikninger gjøre at man får en større dybde og forståelse innenfor temaene derivasjon og integrasjon.

Vi vil i dette delkapitlet primært konsentrere oss om oppgavene innenfor emneområdet *Kalkulus* i TIMSS Advanced (se kapittel 9). Grunnen er at mange av disse oppgavene relaterer seg til de øvre delene av den sentrale «stammen» nevnt i forrige avsnitt, og at de derfor måler hvilken progresjon elevene har hatt eller ikke har hatt i matematikken. Vi vil for eksempel også kunne kommentere elevenes kunnskaper innen algebra ut fra disse oppgavene.

Kalkulus er også en sentral del av matematikken som de fleste begynnerkurs i matematikk på universiteter og høgskoler bygger videre på.

Det første fagtemaet vi skal fokusere på, er *derivasjon*. Resultatene fra flere av kalkulusoppgavene i TIMSS Advanced indikerer en positiv utvikling blant norske elever innen dette temaet. I kalkulusoppgave 1 (se figur 12.4) skulle elevene derivere et uttrykk. I 2008 svarte 57 % av de norske elevene riktig (svaralternativ C) på denne oppgaven, i 2015 var det 73 %.

Figur 12.4 Kalkulusoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015 og 2008.

Funksjonen f er definert ved $f(x) = e^{x^2}$. Da er $f'(x)$ lik

Ⓐ e^{x^2}

Ⓑ e^{2x}

Ⓒ $2xe^{x^2}$

Ⓓ $e^{x^2} + 2x$

Ⓔ $2e^{2x^3}$

Faktisk er dette den oppgaven der norske elever viser størst framgang fra 2008 til 2015 når vi korrigerer for endring i internasjonalt snitt. Oppgaven krever bruk av kjerneregelen for derivasjon, noe elevene lærer i Matematikk R1. Elevene får videre bruk for å kunne anvende kjerneregelen *baklengs* i R2 både når de skal antiderivere/integrere og når de skal løse differensiallikninger. Dette gjør at elevene får vedlikeholdt kunnskapen, og at den tilføres dybde. «Vi blir sjelden trygge på egne ferdigheter hvis vi ikke får brukt dem gjentatte ganger i mer komplekse og sammensatte situasjoner» (Borge et al., 2014).

Kalkulusoppgave 1 er også et eksempel på en TIMSS Advanced-oppgave som ligger svært nær oppgavesjangre i begynnerkurs på UH-nivå. Til midtveiseksamen i emnet MAT1100 ved UiO høstsemesteret 2013 ble følgende oppgave gitt:

La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = e^{x^2}$ for alle x. Da er den annenderiverte av f gitt ved

A) $f''(x) = (2x)^2 e^{x^2}$

B) $f''(x) = e^{x^2}$

C) $f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$

D) $f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}$

E) $f''(x) = 2xe^{x^2}$

Vi ser her at funksjonen som skal deriveres, er den samme som i TIMSS Advanced-oppgaven. Forskjellen ligger dels i den noe mer formelle notasjonen som brukes i UH-oppgaven, og dels i at UH-oppgaven etterspør den andrederiverte. Rent teknisk er kompetansen som kreves for å finne den andrederiverte av denne funksjonen, essensielt den samme som kreves for å finne den førstederiverte f'. At innholdet i denne MAT1100-oppgaven vurderes som noe det er relevant å teste i en UH-eksamen, viser tydelig relevansen av TIMSS Advanced i et UH-perspektiv.

I en annen oppgave (se kalkulusoppgave 3, kapittel 9) fra TIMSS Advanced 2015 skulle elevene dobbeltderivere uttrykket $x^2 + (1/x)$. Også her var det klar framgang i Norge: 21 % av elevene svarte riktig i 2008 og 42 % svarte riktig i 2015 $(2 + (2/x^3))$. I denne oppgaven kan elevene ha fordel av algebraiske manipulasjoner underveis.

Et relatert eksempel finner vi i kalkulusoppgave 4, kapittel 9 som også omhandler derivasjon. Her skulle elevene tegne fortegnsskjema for $f'(x)$ ut fra grafen til f. Her svarte 73 % av de norske elevene riktig i 2015, mens 53 % svarte riktig i 2008. Det er tydelig at elevene har fått jobbe med ulike representasjoner av begrepet derivasjon og det å se sammenhenger, to strategier som forskning viser er god undervisningspraksis (NCTM, 2014). Generelt vil forståelse som er robust med hensyn til variasjon av innfallsvinkel utgjøre et godt grunnlag for videre progresjon. Dette er sentralt i relasjon til videre studier, der man forventer at skolematematikken sitter og man har begrenset tid til å bruke på repetisjon.

Ut fra resultatene på kalkulusoppgave 1 (figur 12.4) kan det se ut til at de norske elevene mestrer bruk av den såkalte kjerneregelen. Ser vi imidlertid på en annen derivasjonsoppgave fra TIMSS Advanced 2015 (se figur 12.5), der elevene også skulle bruke kjerneregelen, er det kun 39 % av de norske elevene som svarte riktig (svaralternativ B). De resterende 61 % av svarene fordelte seg ganske likt på de tre feilsvarene. Sammenlikner vi oppgaven i figur 12.5 med oppgaven i figur 12.4, er én åpenbar forskjell at oppgaven i figur 12.5 inneholder en uspesifisert funksjon, nemlig kjernefunksjonen h. Dersom elevene har en forståelse for kjerneregelen slik den kan formuleres generelt, for eksempel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{gir} \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x),$$

så burde ikke oppgaven i figur 12.5 by på vesentlig større utfordringer enn den i figur 12.4. De langt svakere norske resultatene på oppgaven i figur 12.5 indikerer derfor at en del elevers forståelse av kjerneregelen er knyttet til hvordan man kan *anvende* kjerneregelen på en del kjente funksjoner, uten at de nødvendigvis har en forståelse for hvordan den kan formuleres generelt. Dette indikerer en svakhet hos populasjonen testet i TIMSS Advanced knyttet til forståelse av formell matematisk syntaks, en type forståelse som blir mer avgjørende på UH-nivå.

Figur 12.5 Kalkulusoppgave 12 fra TIMSS Advanced 2015.

La h være en deriverbar funksjon av x.
Hva er den deriverte med hensyn på x av $\sin^2(h(x))$?

(A) $2\sin(h(x))h'(x)$

(B) $2\sin(h(x))\cos(h(x))h'(x)$

(C) $2\sin(h(x))\cos(h(x))$

(D) $2\sin(h(x))\cos(h'(x))$

Når det gjelder begrepet *grenseverdi*, kan vi spore et norsk progresjonsproblem i prestasjonsdataene fra TIMSS Advanced. Etter hovedområdet Funksjoner i Matematikk 1T skal elevene blant annet kunne *gjere greie for definisjonen av den deriverte* (KD, 2006). Denne utgreiingen bygger på begrepet grenseverdi. Et av kompetansemålene i Funksjoner etter Matematikk R1 (KD, 2006) er at elevene skal kunne

- *gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare*

Grenseverdi defineres ikke i detalj (formelt) i skolematematikken, men man jobber med begrepet ut fra en intuitiv forståelse av at det er «en verdi vi nærmer oss / går mot».

Relatert til begrepet grenseverdi er begrepet *kontinuitet*. Elevene skal også kunne gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige. I kalkulusoppgave 10 i TIMSS Advanced 2015 (figur 12.6) skulle elevene avgjøre om en funksjon er kontinuerlig i et punkt og gi en begrunnelse.

Figur 12.6 Kalkulusoppgave 10 fra TIMSS Advanced 2015.

La f være en funksjon definert for alle reelle tall ved denne regelen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x = 1 \\ 2x \text{ hvis } x \neq 1 \end{cases}$$

Er f kontinuerlig i $x = 1$?

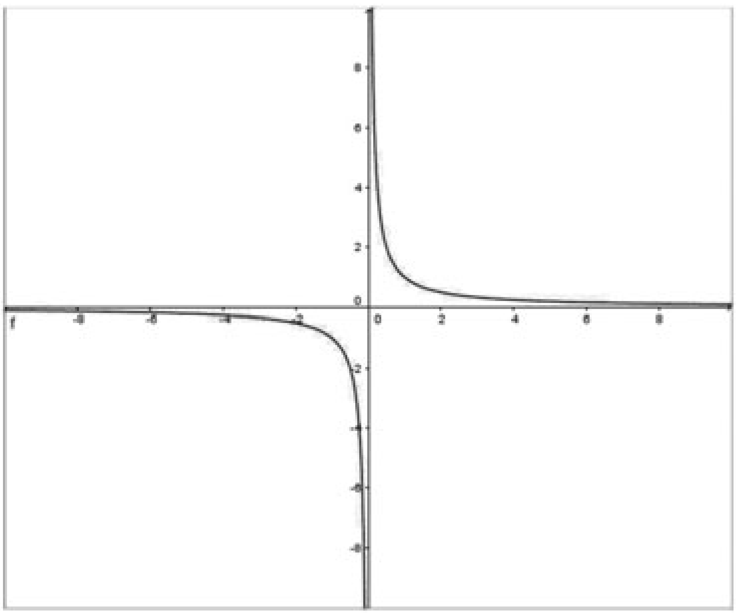
Begrunn svaret.

Det krevdes ikke et formelt svar i denne oppgaven – det var for eksempel nok å tegne graf og påpeke at punktet $(1, 1)$ ikke ligger på linjen gitt ved $y = 2x$, eventuelt å si at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1 er lik 2, som ikke er lik $f(1)$. Det var kun 8 % av de norske elevene som fikk riktig svar på denne oppgaven. Dette kan være fordi elevene møter få eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige og videre at det arbeides lite med slike problemstillinger. Uansett gir dette et svakt utgangspunkt for studier på UH-nivå.

Vi ser at kontinuitet er et begrep begynnerstudentene sliter med. Spesielt de elevene som skal ta et matematikktungt studium vil møte en presis definisjon av begrepet grenseverdi, som er helt sentralt i studiet av funksjoner. Det vil være til stor hjelp for elevene å finne måter å snakke om dette begrepet på slik at det blir lettere når de fortsetter sine matematikkstudier; det vil for eksempel være nyttig å gjenta og problematisere hva det vil si «å være nærme noe» – «når er vi nærme nok?». Elevene i programfag vil generelt tjene mye på å få gode uformelle gjengivelser av de presise definisjonene av begrepene nevnt i læreplanen. Generelt vil en mangel på definisjoner gjøre det vanskelig å jobbe på en «matematisk god måte».

La oss ta et eksempel: Slik begynnerstudenter på universiteter og høgskoler gjerne møter teorien for kontinuerlige funksjoner, vil funksjonen f gitt ved $f(x) = 1/x$ være kontinuerlig (vi har tegnet grafen i figur 12.7). Dette kommer ofte som en overraskelse på studentene, da veldig mange har jobbet med en intuitiv forståelse av at en kontinuerlig funksjon er en funksjon med en sammenhengende graf. Tanken bak begrepet kontinuitet er at man i hvert punkt a skal kunne få funksjonsverdiene $f(x)$ til å bli så nær funksjonsverdien $f(a)$ man vil, bare x er nær nok a. Dette kan man knytte til grafen av $1/x$: For å snakke om at vi er nærme nok, må vi bruke punkter i definisjonsmengden til funksjonen, og dermed kan man poengtere at vi kun kan snakke om kontinuitet i de punktene som er med i definisjonsmengden (noe som gjør at $f(x) = 1/x$ er kontinuerlig).

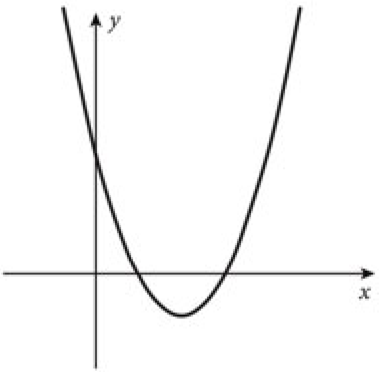
Figur 12.7 Grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = 1/x$ for x i intervallet $[-10, 10]$.



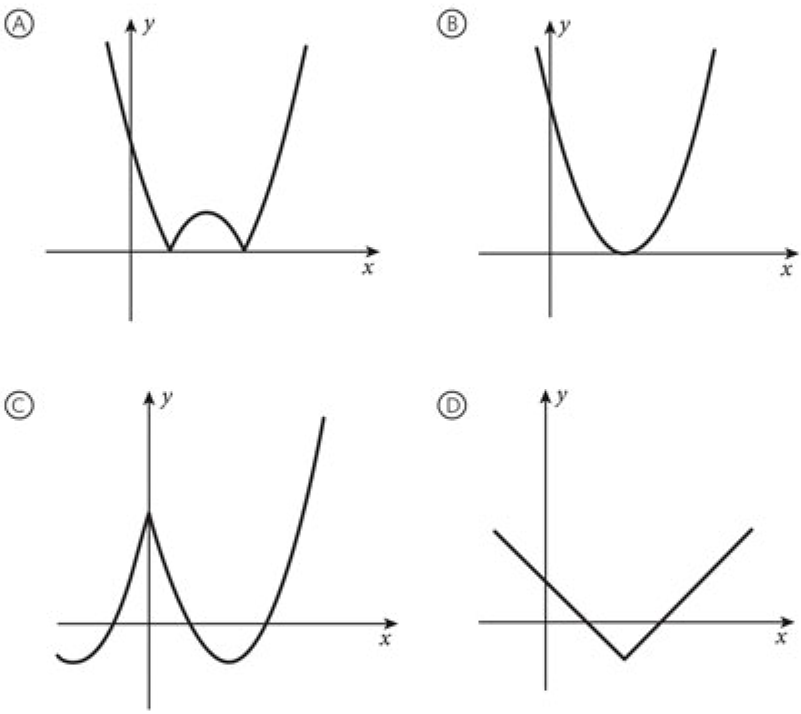
En annen grunn til at oppgaven i figur 12.6 om kontinuitet har falt veldig vanskelig kan være at elevene heller ikke har jobbet så mye med funksjoner med såkalt delt forskrift. Det vanligste eksempelet på en slik funksjon er absoluttverdifunksjonen. Den dukker opp i en algebraoppgave i TIMSS Advanced, og da i form av en grafisk framstilling (se figur 12.8).

Figur 12.8 Algebraoppgave 8 i TIMSS Advanced 2015.

Grafen til $y = f(x)$ er vist her.



Hvilken av følgende grafer viser $y = |f(x)|$?



På denne oppgaven svarte 55 % av de norske elevene riktig (svaralternativ A). Det skal også nevnes at over 80 % av elevene ga et svar der grafen ligger over x-aksen (svaralternativ A eller B). Og her kommer et annet perspektiv inn: Absoluttverdi er et begrep som ikke eksplisitt nevnes i læreplanen, men som naturlig hører inn, blant annet som et eksempel på en funksjon som ikke er deriverbar i alle punkter. I typiske universitetskurs er deriverbarhet sentralt, og forståelse for absoluttverdi gir tilgang til mange gode eksempler i denne sammenhengen. Absoluttverdi er også viktig i forbindelse med presise definisjoner av grensebegreper og bruk av disse definisjonene, noe som er sentralt og vanskelig teoristoff i mange UH-begynnerkurs. Har ikke elevene med seg en robust forståelse for begrepet absoluttverdi fra videregående skole, blir progresjonen knyttet til denne typen stoff i UH-kursene meget bratt. Dette er et eksempel på et systemproblem som har å gjøre med overgangen til videre studier. Det oppstår en form for ansvarspulverisering, fordi det er visse matematiske temaer som ikke dekkes på en adekvat måte verken i skolen eller i UH-sektoren.

Eksemplet med absoluttverdi illustrerer viktigheten av forkunnskapene elevene har fra skolen. Mye av dette stoffet trenger tid for å modnes – derfor er det viktig med prioritering og progresjon – og i de nye UH-emnene som elevene møter, rekker man ikke å bøte på for mange hull; til det går tiden for fort, og studentene skal helst bruke energien på videre progresjon. Jamfør diskusjonen om ujevn progresjon i delkapittel 5.3. I et slikt lys kan noen av resultatene fra TIMSS Advanced være foruroligende.

Et fellestrekk for mange av disse foruroligende resultatene er «uvante problemstillinger». I algebraoppgave 14 (figur 12.9) svarte 11 % av de norske elevene riktig ($x = 0$ og $x = 10^{12}a$).

Figur 12.9 Algebraoppgave 14 fra TIMSS Advanced 2015.

La a være en konstant ulik 0. Finn de to x-verdiene der grafene til $y = 10^6 ax$ og $y = \frac{x^2}{10^6}$ skjærer hverandre.

Svar: ______________________________

Dette er en uvant oppgave i den forstand at det er mange begreper som kombineres: parametere, tierpotenser og brøker. Flere vil nok få til denne oppgaven når de har fått mer trening, men selve stoffet oppgaven omhandler vil ikke gjennomgås på nytt senere, og vi gjentar gjerne at dette er et foruroligende resultat. Det kan for eksempel virke som om elevene er uvante med at parametere kan dukke opp i svaret.

Vi tar med et eksempel til på en uvant oppgave som elevene vil ha stort utbytte av å kunne svare riktig på. Algebraoppgaven fra TIMSS Advanced i figur 12.10 omhandler den såkalte konjugatsetningen. Her svarte 23 % av norske elever riktig (svaralternativ A). Igjen kan vi bruke ordet «uvant» om oppgaven, men oppgaven omhandler et tema man har hatt god tid til å jobbe med i skolematematikken (se også kapittel 11). Å kunne omforme formler på en effektiv måte er en grunnleggende matematisk ferdighet og et nødvendig grunnlag for videre studier.

Figur 12.10 Algebraoppgave 1 fra TIMSS Advanced 2015.

Dersom $x > 0$, $y > 0$, og $x \neq y$, så er $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ lik:

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

Ⓑ $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Ⓒ $\dfrac{1}{x-y}$

Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Ⓔ $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2-y^2}$

Vi avslutter med en av oppgavene fra TIMSS Advanced der norske elever har størst framgang – når vi ser bort fra oppgaver innen derivasjon. Det er en algebraoppgave, og elevene skal finne feil i en løsning av en logaritmelikning (se figur 12.11). Her svarte 43 % av norske R2-elever riktig i 2015, mens 24 % av 3MX-elevene svarte riktig i 2008. Riktig svar er å påpeke at overgangen mellom linje 1 og 2 ikke stemmer («det er ikke slik vi regner med logaritmer»). Dette er oppgave som skiller seg fra tradisjonelle oppgavesjangre i norsk videregående skole. Her kan fokus på diskusjon og refleksjon i undervisningen ha hjulpet elevene. I videre studier er man også opptatt av at studentene skal diskutere og jobbe muntlig med matematikk.

Figur 12.11 Algebraoppgave 7 fra TIMSS Advanced 2015.

Carl vil løyse likninga $\ln(2x-1)=0$. Løysingsforsøket hans er vist nedanfor, men inneheld ein feil.

$$
\begin{aligned}
&\ln(2x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x - \ln 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x - 0 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\ln 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2x = 1\\
\Leftrightarrow\ &x = 0{,}5
\end{aligned}
$$

Kva for ein feil gjorde Carl?

12.4 Oppsummering og avsluttende kommentarer

Mens resultatene fra eksempelstudien i delkapittel 12.2 indikerer betydningen av manglende forkunnskaper i matematikk ved overgangen til UH-nivå, illustrerer oppgavene i delkapittel 12.3 nærheten mellom matematikkompetanse slik denne måles i TIMSS Advanced og læringsmål ved begynnerkurs i matematikk på UH-nivå. Vi ser at det kan være relevant for arbeid med matematikk på UH-nivå å studere resultater fra TIMSS Advanced. Nærheten mellom TIMSS Advanced matematikk og typiske UH-begynnerkurs i matematikk er, etter vår vurdering, så stor at det ville være av interesse å måle UH-studentenes kompetanse ved bruk av TIMSS Advanced. Faktisk benyttet den norske gruppen for TIMSS Advanced 2015 en gruppe studenter fra kurset vi har brukt som eksempel i dette kapitlet, MAT1100 ved MN, UiO, i en pre-pilotering av visse oppgaver forut for pilotundersøkelsen i 2014, som igjen lå til grunn for selve gjennomføringen av TIMSS Advanced i 2015. At dette gir mening, illustrerer igjen nærheten mellom TIMSS Advanced og denne typen UH-kurs. Mange aspekter som kommer fram i resultatene i TIMSS Advanced stemmer overens med resultater fra Norsk matematikkråds forkunnskapstest (NMR, 2015).

Mange studenter erfarer at overgangen fra skole til videre studier er stor, spesielt når det gjelder matematikk. De ulike institusjonene innen høyere utdanning arrangerer gjerne ulike former for forkurs og støttekurs, og det gis studietips til de nye studentene (Borge, Johansen & Seland, 2016). Elevenes prestasjoner i TIMSS Advanced gir verdifull informasjon om hva norske elever har av matematisk kunnskap etter 13 års skolegang og om hvilke forkunnskaper studentene som starter på ulike universitets- og høgskolestudier sitter inne med.

KAPITTEL 13

Oppsummering og drøfting av hovedfunn

Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Inger Christin Borge
Matematisk institutt, UiO

13.1 Introduksjon – matematikk for alle

Ulike begrunnelser har blitt brukt for hvorfor elever trenger å lære matematikk, for hva som skal være innholdet i faget, og for hvilke metoder som skal brukes i undervisningen. Både begrunnelsene og hva som har utkrystallisert seg på bakgrunn av disse, har variert mye over tid og mellom land. Den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss (2003) har oppsummert ulike grunner for at matematikk er et kjernefag i skolen verden over. Fra et samfunnsperspektiv viser han til at kunnskaper i matematikk er viktige for samfunnets teknologiske og økonomiske utvikling, og til at samfunnet generelt skal opprettholdes og utvikles ideologisk og kulturelt. Fra et individperspektiv peker han på at matematikk skal gi elevene det grunnlaget de trenger for å fungere i dagliglivet, og den typen kompetanse som gir dem muligheter til å ta den utdanningen og få den karrieren de ønsker, og som samfunnet kan tilby dem. For mer om legitimering av matematikk i skolen henviser vi til kapittel 4 i boka.

Et høyt utviklet teknologisk samfunn er utenkelig uten matematikk: Matematikk har vært og er viktig for utviklingen på områder som naturvitenskap, økonomi og informasjonsteknologi. Forskning på miljøutfordringer og økonomiske kriser forutsetter bruk av matematikk. Også innen medisin, samfunnskunnskap og språk utgjør matematikk en viktig basis for mye av forskningen. Et moderne samfunn er basert på mer eller mindre avanserte matematiske modeller og beregninger (Skovsmose, 1994; Ernest, 2000).

Matematikk for alle har vært et slagord som har hatt stor gjennomslagskraft i mange land, ikke minst i de nordiske landene, inkludert Norge. Går vi tilbake i tid, var det særlig ren og anvendt aritmetikk og deskriptiv geometri med vekt på måling og målbarhet som sto sentralt i grunnutdanningen. I dagens moderne samfunn vil mange elever trenge matematikkunnskaper ut over dette. I mange utdanninger og yrker er det en forutsetning at man har et godt grunnlag ut over den rene aritmetikken, for eksempel at man har grunnleggende kunnskap i algebra. I et samfunn med rask teknologisk utvikling, er det rimelig å anta at matematisk kunnskap vil få en økende betydning for en stadig større del av befolkningen.

Det kan være grunn til å stille spørsmål om hvordan slagordet «matematikk for alle» har blitt fortolket. Det kan synes som om man i Norge i stor grad har tolket det som et utsagn om den typen matematikk som alle kan og skal lære, og at man i liten grad har lagt vekt på behovene til elever med spesiell interesse og spesielt talent i faget (Skogen, 2014a). Dette på tross av at både opplæringsloven og læreplanverket for norsk skole understreker at alle elever har krav på opplæring tilpasset deres evner og forutsetninger. Det gjelder elever med særlige evner og anlegg for faget i like stor grad som elever med lærevansker (for mer om dette, se kapittel 7). Det vil også variere hvilken kompetanse i matematikk elevene trenger å bygge videre på i senere utdanningsløp.

13.2 Prioritering av innhold i matematikk i skolen

Grunnlaget for all matematikkopplæring i skolen er å gi elevene gode kunnskaper innen tall, tallregning og tallforståelse. Enten man ser på hvilken type matematikk elevene vil trenge i sitt dagligliv, eller for senere utdanning og yrkesliv, er kunnskaper innen området tall og tallforståelse helt avgjørende. Det er allmenn aksept for dette i Norge, som i land over hele verden. Områder som måling og statistikk kan man se på som en integrert del av området tall. Når disse områdene likevel skilles ut som egne fagområder, er det mer ut ifra et ønske om å sikre oppmerksomheten også på dette, og ikke la alt inngå under tall.

Mens det er allment akseptert at tall og tallforståelse har en spesiell posisjon i skolematematikken, ser det ikke ut til at man i Norge har samme aksept for dette når det gjelder algebra. Vi baserer denne konklusjonen på konsistente resultater over 20 år som viser at norske elever presterer svakere enn elever i andre land det er rimelig å sammenlikne oss med på dette området (for mer om dette, se kapittel 6).

Under sentrale funn på ungdomstrinnet fra 1995-studien står det på nettsidene til TIMSS:

> *I matematikk oppnådde norske elever de beste resultatene i statistikk, mens de var svakest i algebra.* (TIMSS 1995 Norge, 1995)

Det samme står det på nettsidene for TIMSS 2003- og TIMSS 2007-studiene (TIMSS 2003 Norge, 2003; TIMSS 2007 Norge, 2007). I den norske rapporten fra TIMSS 2011 står det at

> *Det synes å peke seg ut som det store problemet i norsk matematikkutdanning at elever på alle trinn presterer svært svakt i algebra. Det gjelder både i grunnskolen, i videregående skole og for nyutdannede lærere i matematikk.* (Grønmo et al., 2012)

Som vi så i kapittel 6, er algebra og statistikk de to fagområdene hvor man finner de største avvikene i land og mellom land for hva de prioriterer av innhold i skolematematikken. Vi har for eksempel sammenliknet elevenes prestasjoner i henholdsvis algebra og statistikk i TIMSS 2015 på ungdomstrinnet med landets generelle prestasjonsnivå. Det betyr at vi har beregnet hvor mange poeng over eller under landets generelle prestasjonsnivå elevenes prestasjoner ligger på de ulike fagområdene som testes. *Ikke noe annet land er i nærheten å ha en så stor forskjell i disfavør av algebra som det Norge har*. Forskjellen i Norge mellom statistikk og algebra er på vel 70 poeng på 9. trinn og over 90 poeng på 8. trinn i en studie hvor standardavviket er 100. Avviket mellom Norges totalskår og Norges skår i emneområdet algebra på 8. trinn (−63 poeng) er det største avviket fra totalskår man finner for *noe* emneområde, i noe land, i TIMSS 2015. Avviket mellom algebraskår og totalskår for den norske trinn 9-populasjonen (−40 poeng) er den *nest største* negative differansen mellom skår i algebra og totalskår for noe land i TIMSS 2015, kun slått av den norske trinn 8-populasjonen. Også i TIMSS Advanced 2015 (13. trinn) har Norge det største negative avviket mellom algebraskår og totalskår blant alle de deltakende landene.

De norske resultatene fra TIMSS-studiene i 1995, 2003, 2007, 2011 og 2015 framstår som *meget konsistente* når det gjelder de svake norske resultatene på området algebra. I tillegg peker trenden på ungdomstrinnet nedover. Det var en signifikant nedgang i elevenes prestasjoner i algebra på 8. trinn fra 2011 til 2015, i motsetning til de andre områdene hvor trenden peker oppover (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Dette diskuteres nærmere i kapittel 6.

Som beskrevet i kapittel 5 kan diskusjonen om de forskjellene vi ser mellom ulike land og regioner i verden når det gjelder prioritering av innhold i skolematematikken, løftes til et nivå der vi ikke diskuterer prioritering av matematikkfaglige *emneområder*, men i stedet diskuterer i hvilken grad man prioriterer «formell matematikk». Med formell matematikk mener vi i denne sammenhengen fagstoff som involverer matematisk teori, enten i form av matematiske setninger (teoremer) eller formelt matematisk språk (formler og uttrykk med variabler). Fagstoff som involverer matematisk teori i den forstand vi diskuterer i kapittel 2 og 5, finnes ikke bare innen emneområdet algebra. Det finnes også TIMSS-oppgaver innen for eksempel emneområdet geometri som involverer både formler og matematiske teoremer, som oppgaver med Pytagoras' setning. Betrakter man forskjellene mellom land når det gjelder innholdsprioritering i skolematematikken på dette nivået, kan man si at de store, systematiske ulikhetene når det gjelder prioritering av algebra er et uttrykk for *et underliggende, mer generelt forhold*: ulik prioritering av *formell matematikk* i den betydningen av ordet som vi bruker her. Som eksemplifisert i delkapittel 5.3 er sentralt modningsstoff i matematikk knyttet til denne kategorien av matematikk. Nedprioritering av formell matematikk på enkelte nivåer kan derfor gi ujevn progresjon i faget. Vi har klare indikasjoner på at dette er et problem i Norge.

Resultatene for norsk grunnskole er nesten overraskende konsistente over 20 år, på ulike nivåer og også i studier med ulikt rammeverk for hvilken type matematikk elevene testes i. Rammeverket for den internasjonale komparative studien PISA er ikke, som i TIMSS, basert på en konsensus med utgangspunkt i de deltakende landenes læreplaner:

> *PISA-undersøkelsen tar ikke utgangspunkt i landenes læreplaner, men tar i hovedsak sikte på å måle elevenes evne til aktivt å bruke kunnskaper og erfaringer i aktuelle situasjoner.* (Kjærnsli & Olsen, 2013, s. 14)

Matematikkoppgavene i PISA presenteres i en lengre eller kortere tekst hentet fra en mer eller mindre hverdagslig situasjon, og det er ingen rene, tradisjonelle matematikkoppgaver som ren tallregning eller løsing av en gitt likning. PISA tester elevene i det de kaller *mathematical literacy*, og rammeverket for måling av dette er utarbeidet av en gruppe eksperter (ibid.). Se kapittel 2 for mer om hva som testes i de ulike internasjonale studiene.

Beskrivelsene av fagområdene i PISA avviker også fra det som vanligvis brukes i lands læreplaner, som algebra, geometri og statistikk. Likevel understøtter konklusjonene fra PISA konklusjonen fra TIMSS om hva norske elever presterer godt på, og hvor de presterer svakest:

> *Prestasjonene er godt over gjennomsnittet for Usikkerhet, samtidig som det er godt under gjennomsnittet for Forandring og sammenheng* og *Rom og form. For Tall og mål presterer norske elever like under OECD-gjennomsnittet.*
> (Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe & Turmo, 2004, s. 57)

Innholdet i området *Usikkerhet* i PISA ligger nært opp til statistikk, mens den formelle matematikken som tallregning og algebraiske uttrykk og funksjoner inngår i Forandring og sammenheng og Tall og mål. I den norske rapporten fra PISA 2012, den andre gangen matematikk var i hovedfokus i studien, trakk man konklusjonen:

> *Norske elever er spesielt svake på oppgaver som er knyttet til det å bruke matematisk formalkompetanse. Det er først og fremst lave andeler på de høyeste nivåene for denne prosessen som ligger bak dette resultatet.*
> (Kjærnsli & Olsen, 2013, s. 35)

På høyere nivåer i skolen, som slutten av videregående skole, og i utdanning av matematikklærere, ser man den samme tendensen. I TIMSS Advanced utmerker algebra seg som det området hvor norske elever presterer svakest, svakere enn på områdene geometri og kalkulus (for mer om dette, se kapittel 3). De samme konklusjonene ble trukket i TEDS-M 2008-studien av lærerstudenter:

> *Kort oppsummert kan man si at resultatet på en relativt enkel algebra-oppgave for lærerstudenter i alle de norske utdanningsveiene gir grunn til bekymring. Det svake resultatet samsvarer for så vidt godt med hva vi har sett i tidligere studier, som TIMSS i grunnskolen (Grønmo, 2010; Grønmo et al., 2004; Grønmo & Onstad, 2009) og TIMSS Advanced i videregående skole (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), hvor det i flere bøker har blitt understreket at kunnskaper i algebra synes å være et nedprioritert område*

> *i norsk skole. At det samme synes å være tilfelle i lærerutdanningene, gir ytterligere grunn til bekymring. Frafall fra yrkesutdanninger i Norge har også blitt begrunnet med at elevene mangler grunnleggende kunnskaper i et viktig område som algebra (NOKUT, 2008).* (Grønmo & Onstad, 2012, s. 150)

Også andre undersøkelser og studier understøtter at det store problemet i norsk skole er en klar underprioritering av algebra. Det gjelder for eksempel resultater fra Norsk matematikkråds forkunnskapstester (NMR, 2015), og det gjelder analyser av den markante tilbakegangen i norske elevers fysikkprestasjoner fra 1995 til 2008 (Lie, Angell & Rohatgi, 2010; Nilsen, Angell & Grønmo, 2013).

Hvordan man har forholdt seg til et slikt resultat, og hvordan man framover skal forholde seg til slike resultater, er et interessant spørsmål. Vi tillater oss å hevde at Norge trenger en langt bredere, mer åpen og konstruktiv debatt omkring dette enn det vi har sett så langt. De spørsmålene vi stiller når det gjelder prioritering av innhold i skolematematikken, er ikke minst viktig for utviklingen av de nye læreplanene for norsk skole som skal tre i kraft fra 2020 (fagfornyelsen). Det er viktig å ta hensyn til Ludvigsen-utvalgets konklusjoner om fagtrengsel, altså at matematikkfaget framstår med for mange ulike temaer, og at man trenger en strengere prioritering av innhold hvor man konsentrerer seg om færre emner for å fremme dybdelæring (NOU, 2015).

Basert på den gjennomgangen vi har gjort av matematikkresultater i Norge over de siste to tiårene, tillater vi oss å konkludere med at en nøkkel til å lykkes i matematikk og gi elevene det de trenger for videre utdanninger og yrker, er å prioritere fagområdet algebra på en helt annen måte i skolen. Det berører hele skoleløpet. I dag kommer algebra så vidt inn i den norske læreplanen for matematikk på mellomtrinnet. I Mønsterplanen av 1974 var *hovedinnføringen* i algebraiske lover lagt til mellomtrinnet (KUD, 1974). Om løsningen fra 1974 er veien å gå, har ikke vi noe klart svar på. Men vi mener man kan argumentere for at algebra må *opprioriteres markant* i forhold til det vi ser i dag, og det vi har sett over de siste 20 årene, i norsk skole.

Nå skal man ikke endre innholdet i norsk skolematematikk fordi vi presterer svakt i internasjonale studier. Det vi skal diskutere, må være basert på begrunnelser for hvorfor elevene skal lære matematikk, og for hvilken type matematikk dagens elever trenger å undervises i med sikte på å fungere både som aktive samfunnsborgere, i dagliglivet og i utdanninger og ulike profesjoner. Mer om dette i forrige delkapittel, og i kapittel 4.

13.3 Progresjon i matematikk i skolen

Progresjonen i det elevene lærer av matematikk gjennom skoleløpet, fra barneskole til ungdomsskole og i videregående skole, henger sammen med dybdelæring. Dybdelæring krever konsentrasjon om sentrale områder og begreper *over tid*, slik at man får til en modningsprosess i elevenes forståelse. Mange emner og kort tid på hvert område vil være det motsatte av dybdelæring.

Det mest grunnleggende lærestoffet i matematikk på barnetrinnet er tall og tallregning. Det er derfor tankevekkende at det er på dette området norske elever på barnetrinnet presterer svakest: «*Som det framgår av figur 2.9, har de norske elevene i alle de tre siste TIMSS-studiene prestert svakest i emneområdet Tall.*» (Bergem et al., 2016, s. 39). Dette har vært påpekt i flere rapporter fra de siste TIMSS-studiene:

> *Selv om vi kan påvise en klar framgang i matematikk fra 2003 til 2011 for norske elever på 4. trinn (se kapittel 2), presterer vi fortsatt lavt i forhold til land det synes naturlig å sammenligne oss med, og det området som framstår som mest problematisk, er Tall. Vi har sett det samme i tidligere TIMSS-studier: Det er spesielt på områdene Tall på 4. trinn og Algebra på 8. trinn at de norske elevene er svake.* (Grønmo et al., 2012, s. 29)

> *Relativt sett skårer de norske elevene svakest i emneområdet Tall. I TIMSS anses denne kategorien som så viktig at man i rammeverket for denne undersøkelsen har bestemt at 50 prosent av alle oppgavene i matematikk for populasjon 1 skal være knyttet til dette emneområdet (se kap. 11.1). Emneområdet Tall inneholder i stor grad oppgaver knyttet til det å beherske de fire regningsarter, og å regne med brøk og desimaltall (Mullis & Martin, 2013). Norske elever på dette trinnet presterer godt i Tall både i et internasjonalt og i et nordisk perspektiv. Men avstanden fra Norge og opp til de østasiatiske landene som presterer aller best i TIMSS, er størst for dette sentrale emneområdet. Så her er det fortsatt et forbedringspotensial.* (Bergem et al., 2016, s. 35)

Elevenes relativt svake kunnskaper innen området tall på barnetrinnet har konsekvenser for deres muligheter til senere å lære algebra. «*Studier har påpekt at mange av de problemene elever har med å lære algebra, skyldes at de har svake kunnskaper innenfor tall/aritmetikk (Brekke, Grønmo & Rosén, 2000; Naalsund, 2012).*» (Grønmo et al., 2012, s. 29)

Som Bergem nevner i rapporten fra TIMSS 2015 (Bergem et al, 2016), er det fortsatt et forbedringspotensial når det gjelder tall på barnetrinnet. Norske elever presterer imidlertid godt innen emneområdet tall på 8. trinn. Det er bare på området statistikk at de norske elevenes prestasjoner på 8. trinn er bedre. Dette reiser spørsmålet både om prioritering og ikke minst om *progresjonen* i norsk matematikkundervisning. Kanskje det hadde vært bedre med mer vekt på dybdelæring innen tall og tallregning på de lavere trinnene i skolen, slik at man på de høyere trinnene kunne få frigjort tid til å lære elevene algebra. Vi henviser her til delkapittel 5.3, som sammenlikner Norge med Singapore vedrørende progresjon.

Den norske læreplanen er organisert med kompetansemål etter 2., 4., 7. og 10. trinn. Det er derfor opp til den enkelte kommune, skole eller lærer å bestemme den faglige progresjonen innenfor hver bolk. Det problematiske med dette er at det kan være fristende å skyve en del stoff oppover på trinnene, særlig det som vil kreve mye innsats fra lærere og elever. Det kan se ut som om det i norsk skole er en tendens til å gjøre nettopp dette (Grønmo & Onstad, 2013a). Det vil kunne gå ut over elevenes muligheter til faglig modning over tid. Hvis noe av det faglige innholdet oppleves som spesielt utfordrende, er det kanskje ikke så rart at dette skyves framover i tid hvis man har den muligheten. Også det at en rekke lærere mangler den faglige kompetansen i algebra (Grønmo & Onstad, 2012), gjør at mange av dem kan antas å gjøre et slikt valg.

Matematikken elevene skal lære videre, bygger på algebra. I kapittel 12 så vi på «stammen» Tall – Algebra – Funksjoner i læreplanen og progresjonen i denne opp til overgangen fra videregående skole til universitetsstudier. Hvis elevene ikke har fått en tilstrekkelig basis i algebra fra grunnskolen, vil man i videregående skole måtte prøve å rette på det før man kan gå videre med ny læring i faget. Problemene vi har med dette i norsk skolematematikk, kan leses ut fra resultatene i TIMSS Advanced. Helhetsbildet som dannes av resultatene fra TIMSS Advanced og TIMSS i grunnskolen viser at det er nødvendig å stille spørsmål omkring progresjonen i matematikkopplæringen gjennom hele det norske skoleløpet.

13.4 Deltakelse i internasjonale studier

Det har i Norge, som i mange andre land, vært en del diskusjon om man skal delta i internasjonale komparative studier. Det kan gå på hvor mange ulike studier man skal delta i, og på hvordan resultatene fra disse studiene kan og bør brukes hvis hensikten er å forbedre landets utdanningssystem. Det er bra at dette diskuteres, og vi skal ta på alvor innvendinger om at internasjonale studier ikke skal være det som styrer våre valg for å utvikle skolen.

Vi som jobber med disse studiene, trenger at noen ser oss i kortene, at noen kommer med kritikk og reiser debatter rundt dette. Vi både kan og bør delta i diskusjoner som reiser relevante faglige problemstillinger om slike studier. I disse studiene, som i annen fagdidaktisk forskning, har det vært en positiv utvikling over tid når det gjelder både innhold og gjennomføring, nettopp fordi de er gjenstand for kritikk og følges med argusøyne. Vi ser både positive muligheter ved å delta, og utfordringer ved at studiene skal bidra på en god måte i utviklingen av landets skolesystem. Her vil vi ta opp noen forutsetninger for at studiene skal bidra positivt i utviklingen av skolematematikken. Vi vil særlig ta opp to områder som vi ser på som essensielle. Det ene er viktigheten av å delta i ulike studier, på ulike trinn og over tid, slik at man har et bredt datagrunnlag for å trekke konklusjoner. Det andre er hvordan resultatene fra disse studiene kan brukes for å bidra positivt i utviklingen av skolesystemet.

Når vi i denne boka kan trekke så klare konklusjoner som vi gjør, er det basert på at vi over lang tid har deltatt i mange ulike studier, studier som vi kan se på som komplementære når det gjelder både det faglige innholdet som testes, og hvilket nivå i skolen som testes. Det er også viktig å ha deltatt i de ulike studiene over tid, slik at vi kan si noe om utviklingen, trendene, både i landet og internasjonalt. Vi deltar hvert fjerde år i TIMSS-studiene i grunnskolen og hvert tredje år i PISA-studiene. Rundt 10 % av elevene på det aktuelle årstrinnet deltar. De fleste norske elever vil gå gjennom hele grunnskolen uten å ha deltatt i noen av disse studiene. Det kan vanskelig kalles et system for overdreven testing, selv om noen har brukt slike karakteristikker. Uten den brede deltakelsen Norge har hatt, ville det ha vært vanskelig å gjøre de analysene og sammenlikningene som denne boka bygger på.

Det andre viktige spørsmålet vi stiller, er hvordan resultatene fra disse studiene kan bidra positivt i utviklingen av skolesystemet i landet. Noen har argumentert med at deltakelsen kan bidra til en type ensretting av hvordan matematikkundervisningen legges opp i ulike land (Sjøberg, 2007). Hvis resultatene bare brukes til å se på hvor gode de generelle resultatene er, og hvor man uten mer refleksjon endrer skolesystemet for å komme høyere på den generelle rankingen, er det ikke umulig at deltakelsen kan virke slik. Men det ville ikke være et resultat av deltakelse i studiene som sådan, men mer et resultat av hvordan vi bruker de resultatene vi får gjennom å delta. I flere av de tidligere rapportene fra de internasjonale studiene har det vært påpekt at man i Norge finner en tendens til at undervisningen legges opp mer ensidig rundt individuell oppgaveregning enn i mange andre land (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Grønmo & Onstad, 2009). Det ser ut til å være mer bruk av diskusjon og drøfting av løsningsmetoder i en del andre land. I den grad denne typen resultater formidles til skolene, kan det bidra til mer variert bruk av metoder og innfallsvinkler i undervisningen, kort sagt det motsatte av ensretting.

Vi ser også tendenser til at norske elever presterer svakere enn vi kunne forvente på oppgaver som er i samsvar med pensum i læreplanen, hvis oppgaveformuleringene bare er litt annerledes enn det som er vanlig i norske lærebøker og til eksamener (se kapittel 8, 9 og 10 for mer om dette). I den grad oppgaver fra de internasjonale studiene, og resultatene på disse, formidles til skolen, vil det kunne bidra til mer variasjon i oppgaver som gis til elevene. Vi er enige i at begge de punktene vi her peker på, nok kunne vært bedre formidlet til skolene enn det som har vært gjort hittil. Det er noe av bakgrunnen for at vi i denne boka har et eget kapittel om bruk av resultatene fra TIMSS Advanced i undervisningen (se kapittel 11). Resultatene fra deltakelse i TIMSS Advanced kan også bidra med informasjon om hvordan man bedre kan ivareta elevenes overgang fra videregående skole til universitetet. I denne boka tas denne problematikken opp i kapittel 12.

Vi har her pekt på noen positive grunner til å delta i de internasjonale studiene i matematikk, og sett på noen eksempler på hvordan vi kan bruke resultatene fra studiene til å fremme en positiv faglig utvikling i skolen. Når det gjelder det siste, har vi fortsatt en vei å gå. Vi har bare så vidt startet denne prosessen, ikke minst vil skoleforskere på de internasjonale prosjektene kunne bidra mer enn det vi har gjort hittil.

13.5 Avsluttende kommentarer – kan vi lykkes i matematikk (og realfag)?

Første punkt for å endre noe til det bedre er å erkjenne de faktiske forholdene og innse at man står overfor et problem. I vårt tilfelle betyr det å erkjenne at det store problemet man har i norsk skolematematikk, er at elevene, på alle nivåer, presterer svakt i algebra.

Algebra er et matematisk språk, en generalisering av aritmetikken, av regning med tall. For videre utdanninger og yrkerer det kunnskaper i algebra mange elever vil trenge. Den sentrale «stammen» i skolematematikken starter med tall og tallforståelse, går videre til algebra, og går videre derfra til funksjonsteori i videregående skoles programfag.

Med tanke på progresjon og tid til dybdelæring i disse faglige kjerneelementene er det tankevekkende at det området som norske elever presterer svakest på er tall på barnetrinnet, og algebra på ungdomstrinnet og i videregående skole.

Norsk skole trenger en bedre prioritering av hva som skal være innholdet i norsk skolematematikk framover, fra barneskole til ungdomsskole og videregående skole, for å møte den enkeltes og samfunnets behov.

Generelt har Norge et meget godt utgangspunkt for å lykkes i realfag, inkludert matematikk. Som et av verdens rikeste land har vi de ressursene som skal til, både økonomisk og menneskelig, for å skape et bedre skolesystem når det gjelder å gi elevene de kunnskapene de trenger i matematikk.

På det menneskelige plan har man lærere med et generelt høyt utdanningsnivå. Problemet er at de har relativt svake faglige kunnskaper i et fag som matematikk (Grønmo & Onstad, 2012). Men dette kan endres om viljen til å gjøre det er til stede, gjennom bedre prioriteringer av innhold i grunnutdanningene, og ved fortsatt bruk av etter- og videreutdanning av lærere som allerede er i jobb i skolen.

Andre viktige faktorer som forskning har pekt på når det gjelder god skoleutvikling, er betydningen av et godt samarbeid mellom alle skolens aktører, fra politikere til lærere, elever og foreldre. Norge framstår som et positivt land i så henseende (Grønmo & Onstad, 2013a). For eksempel viste analyser av årsaker til den positive utviklingen man så i norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag fra TIMSS 2007 til TIMSS 2011, at endringer i det skolemiljørelaterte konstruktet *læringstrykk* kunne forklare den positive endringen på 8. trinn i både matematikk og naturfag sammenliknet med studien i 2007

(Nilsen, Grønmo & Hole, 2013, s. 46). «Læringstrykk» var her definert på en slik måte at det blant annet involverte foreldres, læreres og elevers engasjement for skolen i arbeidet for å oppnå gode faglige prestasjoner.

Et betimelig spørsmål er da hvorfor de norske prestasjonene innen emneområdet algebra fortsatt er så svake, og hvorfor trenden på dette fagområdet er negativ selv der hvor vi finner en generell positiv trend i prestasjoner (se kapittel 3).

Hvorfor har ikke de signalene som har kommet om dette over flere tiår, blitt tatt mer på alvor? Basert på de mange resultatene og analysene vi har presentert i denne boka, reiser vi spørsmålet om dette har sammenheng med et dyptliggende syn på matematikk som preger det norske samfunnet. Det er aksept for at elevene skal lære tall og tallregning, inkludert enkle beregninger og statistikk. Algebra derimot, er det ikke så viktig å lære dem, det er for de spesielt interesserte. Som diskutert i kapittel 5, kan dette oppfattes som et uttrykk for at man i Norge generelt sett prioriterer formell matematikk (matematisk teori) i mindre grad enn man gjør i mange andre deler av verden. At prestasjonsforskjellene slår ut i algebra spesielt, kan skyldes at algebra er det emneområdet i grunnskole/videregående skole som i størst grad forholder seg til formell matematikk og i størst grad har relasjoner til matematisk teori. I Norge kan man uten blygsel stå fram og si at man ikke forstår noe av regning med x-er og y-er, at man ikke har noen forståelse for regning med bokstaver, alt det som inngår som grunnleggende for algebra og matematisk teori generelt. Dette gjennomsyrer samfunnet, det er en del av den norske kulturen. Å endre på et lands kultur er noe av det vanskeligste man kan gi seg ut på. Likevel, hvis det er slik at elevene i Norge trenger kunnskaper i algebra for å kunne ta den utdanningen de trenger, for å få det yrket de ønsker seg, og som samfunnet trenger kompetente personer i, er det ikke da på tide å utfordre norsk kultur på dette området? Det vil ta tid, men det er langt fra umulig hvis man bare er villig til å jobbe systematisk og hardt.

Vi har fra mange analyser sett hva som kjennetegner matematikkundervisningen i andre land, og vi har sett at nedprioritering av algebra og formell matematikk generelt ikke er et globalt trekk. Østeuropeiske og østasiatiske land framstår med en annen kultur på dette området. Skal man bli god i noe, er det ofte både nødvendig og hensiktsmessig å se til de som er bedre enn oss. I tilfellet skolematematikk virker det som at man i Norge noe ensidig ser til de andre nordiske og engelskspråklige landene, land med mange av de samme kulturelle trekkene som oss, og antakelig med mange av de samme utfordringene som oss. Når det gjelder algebra og progresjon innen formell matematikk, framstår det i lys av resultatene fra internasjonale studier som mer naturlig å la seg inspirere av for eksempel østasiatiske, østeuropeiske og søreuropeiske land. Ikke for å kopiere, for det er ingen god måte å gjøre det på. Men for å få innspill og ideer til hva vi kan gjøre, ideer som vi kan utprøve, forske på og eventuelt implementere på måter som vi finner hensiktsmessig. Selv om vi sannsynligvis er (et av) verdens beste land å leve i, er det viktig å erkjenne at vi ikke er verdensmestere i alt.

KAPITTEL 14

Rammeverk og metoder

Torgeir Onstad
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
Liv Sissel Grønmo
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO

Dette kapitlet gir en kortfattet beskrivelse av bakgrunnen for TIMSS Advanced og en gjennomgang av hvordan studien ble planlagt og gjennomført. Framstillingen bygger på kapittel 12 i den norske matematikkrapporten fra TIMSS Advanced 2008 (Onstad, 2010b) og kapittel 7 i den norske rapporten fra TIMSS Advanced 2015 (Onstad & Grønmo, 2016).

14.1 Hva er TIMSS Advanced?

14.1.1 Historikk

TIMSS er en forkortelse for *Trends in International Mathematics and Science Study*. Det er først og fremst en stor internasjonal undersøkelse av matematikk og naturfag i grunnskolen. TIMSS beskriver og sammenlikner elevprestasjoner i disse fagene, så vel nasjonalt som internasjonalt, og søker å belyse og forstå forskjeller i prestasjoner ut fra andre data i undersøkelsen. Slik kan man si noe om hvilke faktorer som fremmer læring, og hvilke som hemmer læring.

Etter noen slike studier i grunnskolen på 1960-, 1970- og 1980-tallet utvidet man i 1995 omfanget til også å gjelde elever i videregående skole. Da definerte man følgende tre populasjoner på øverste trinn i videregående skole:

- **Generalistene**
  Denne populasjonen besto av alle elever i samtlige studieretninger på øverste trinn i videregående skole. Disse elevene ble testet i allmenne matematikk- og naturfagkunnskaper.

- **Fysikkspesialistene**
  Denne populasjonen besto av de elevene som tok høyeste spesialisering i fysikk; i Norge betydde det den gangen elevene på kurset 3FY.
- **Matematikkspesialistene**
  Denne populasjonen besto av de elevene som tok høyeste spesialisering i matematikk (på engelsk *advanced mathematics*); i Norge betydde det den gangen elevene på kurset 3MX.

Etter 1995 har TIMSS-undersøkelser i grunnskolen blitt gjennomført regelmessig hvert fjerde år, nå senest i 2015. *TIMSS Advanced* er en videreføring av undersøkelsene av fysikk- og matematikkspesialistene i videregående skole og har etter 1995 blitt gjennomført i 2008 og 2015.

Norge har deltatt i nesten samtlige TIMSS- og TIMSS Advanced-studier. I 1995 deltok vi imidlertid bare i de to første av de tre populasjonene på videregående nivå, altså generalistene og fysikkspesialistene. Myndighetene ønsket likevel en undersøkelse også av matematikkspesialistene, og i 1998 gjennomførte man den samme matematikkstudien i Norge som hadde vært gjennomført internasjonalt i 1995. Det ble utgitt en samlet norsk rapport for disse tre undersøkelsene (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999).

Det at Norge gjennomførte matematikkundersøkelsen i etterkant av den internasjonale studien, hadde visse konsekvenser. De norske resultatene kom ikke med i den internasjonale databasen. De var ikke med i grunnlaget for den standardiserte skalaen og beregningen av det internasjonale skalerte gjennomsnittet. Det betyr at det er noe større usikkerhet forbundet med norske matematikkdata fra 1998 enn det ville ha vært dersom Norge hadde deltatt i 1995. Vi får likevel et godt inntrykk av hvordan Norge gjorde det i 1998 i forhold til andre land i 1995, slik dataene ble analysert i den norske rapporten den gang (Angell et al., 1999), og et godt grunnlag for å vurdere hvordan de norske prestasjonene i matematikk har forandret seg fra 1998 til 2008 og 2015.

Oppslutningen om TIMSS Advanced har vært betydelig lavere enn det vi er vant til i TIMSS. Tabell 14.1 viser de landene som deltok i henholdsvis 1995, 2008 og 2015.

Tabell 14.1 Deltakerland i TIMSS Advanced i 1995 2008 og 2015. Land som har deltatt flere ganger er gulfarget

Land	Deltok i 1995	Deltok i 2008	Deltok i 2015
Armenia		X	
Australia	(x)		
Canada	X		
Danmark	(x)		
Filippinene		M	
Frankrike	X		X
Hellas	X		
Iran		X	
Israel	(x)		
Italia	M	X	X
Kypros	X		
Latvia	F		
Libanon		X	X
Litauen	M		
Nederland		X	
Norge	Fm	X	X
Portugal			X
Russland	X	X	X
Slovenia	(x)	X	X
Sveits	X		
Sverige	X	X	X
Tsjekkia	X		
Tyskland	X		
USA	(x)		X
Østerrike	(x)		

X: Deltok på ordinær måte i begge fag
(x): Deltok, men med for små utvalg
M: Deltok bare i matematikk
F: Deltok bare i fysikk
Fm: Deltok ordinært i fysikk, men avholdt matematikkstudien i 1998

Totalt har altså 25 land deltatt minst én gang i TIMSS Advanced. Av de ni landene som deltok i 2015, har åtte deltatt én eller to ganger før.

14.1.2 Organisering

Det overordnede ansvaret for utviklingen og gjennomføringen av alle TIMSS-studiene, deriblant TIMSS Advanced, ligger hos den internasjonale organisasjonen IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*). IEA er et internasjonalt nettverk for utdanningsforskning som ble etablert i 1959. Det internasjonale prosjektsenteret er lagt til Boston College i USA. Ansvar knyttet til statistisk design og databehandling er delegert til Data Processing and Research Center i Hamburg og Statistics Canada i Ottawa.

I Norge er det Utdanningsdirektoratet som på vegne av Kunnskapsdepartementet har ansvaret for norsk deltakelse og bevilgning av midler. Ansvaret for gjennomføringen av og rapporteringen fra studiene er delegert til Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo. Prosjektet er der organisert med en prosjektleder og prosjektgruppe som har arbeidet med TIMSS Advanced i flere år. Det er en tilsvarende prosjektgruppe på ILS for TIMSS-undersøkelsene i grunnskolen. Disse prosjektgruppene er tilknyttet Enhet for kvantitative utdanningsanalyser (EKVA) ved ILS.

Den norske prosjektgruppen for TIMSS Advanced har samarbeidet med prosjektsenteret i Boston, IEAs sekretariat i Amsterdam, Data Processing and Research Center i Hamburg, Statistics Canada, og med de nasjonale prosjektgruppene i noen av de andre deltakerlandene. Den norske prosjektgruppen har hatt to medlemmer i SMIRC (*Science and Mathematics Item Review Committee* – en internasjonal gruppe oppnevnt av prosjektsenteret i Boston), som har hatt et overordnet ansvar for oppgavene som er blitt brukt i de faglige testene. Disse to medlemmene har også sittet i et mindre arbeidsutvalg (*Task Force*) for SMIRC.

Informasjon om ulike hovedaktører finnes på følgende nettsider:

- IEA: http://www.iea.nl/
- Prosjektsenteret i Boston: http://timssandpirls.bc.edu/
- ILS: http://www.ils.uio.no/
- TIMSS Advanced og TIMSS i Norge: http://www.timss.no/

14.1.3 Populasjoner

Når det gjelder hvilke populasjoner som blir undersøkt, er det viktige forskjeller mellom TIMSS i grunnskolen og TIMSS Advanced i videregående skole. I grunnskolen undersøker TIMSS et representativt utvalg av *hele årskullet* på 4. trinn og på 8. trinn (5. og 9. trinn i Norge i 2015). TIMSS Advanced undersøker betraktelig snevrere grupper, nemlig de elevene på øverste trinn i den videregående skolen som har valgt det eller de kurs som vedkommende land har definert som avansert matematikk eller fysikk. I Norge i 2015 gjaldt det kursene Matematikk R2 og Fysikk 2. Elever som tok begge disse kursene tilhørte begge populasjonene.

Læreplaner er forskjellige fra land til land. Man skal ikke lære nøyaktig det samme på samme trinn i alle land. Når det gjelder matematikkplanene for barnetrinnet, er likevel likhetene langt mer slående enn ulikhetene. Det er påfallende samstemmighet i de fleste land om det faglige innholdet i matematikken i barneskolen og ganske stor enighet om innholdet i naturfag. Forskjellene blir litt større når vi kommer til ungdomstrinnet, men fortsatt er det stor grad av samsvar. I videregående utdanning øker variasjonene. Det gjelder for eksempel hvor mye matematikk som er obligatorisk, hvilke kurs som tilbys, hvilket matematisk innhold disse kursene har, hvilke fagkombinasjoner kursene eventuelt inngår i og hvilke kurs som kreves for ulike typer høyere utdanning. Tilsvarende kan sies for fysikk.

Det er bare elevene som tar de kursene som er definert som avansert matematikk i det enkelte land, som utgjør landets matematikkpopulasjon i TIMSS Advanced. Tabell 14.2 øverst på neste side viser hvor stor prosentandel denne populasjonen er av årskullet i hvert deltakerland. Det dreier seg altså ikke om andelen av skoleelevene, men om *andelen av hele det aktuelle årskullet* i befolkningen. Denne prosentsatsen kalles *dekningsgraden* (*coverage index*) for hvert land.

Det er store variasjoner i dekningsgrad i matematikk, fra under 4 % til godt over 30 %. For Libanon avspeiler den lave prosentandelen trolig landets mangel på ressurser til videregående utdanning. I den andre enden av skalaen finner vi Slovenia; der tar ca. en tredel av årskullet avansert matematikk. Skulle vi overført Slovenias prosentsats til Norge, ville det betydd at de fleste av elevene på studieforberedende programmer skulle ha tatt Matematikk R2. I Norge lyder det helt utenkelig at en så stor andel av elevene skal ta avansert matematikk til topps, men i Slovenia er det tilfellet.

Tabell 14.2 Dekningsgrad: matematikkpopulasjonen i TIMSS Advanced i prosent av hele årskullet

Land	Dekningsgrad i matematikk i prosent av hele årskullet
Libanon	3,9
Russland*	10,1
Norge	10,9
USA	11,4
Sverige	14,1
Frankrike	21,5
Italia	24,5
Portugal	28,5
Slovenia	34,4

* I 2008 testet Russland bare elever som tok svært avanserte matematikkurs. Da var dekningsgraden bare 1,4 %. I 2015 valgte de å definere flere kurs som avanserte, og dermed ble dekningsgraden høyere. For å kunne gjøre fornuftige trendanalyser rapporterer de denne gangen resultatene både til hele gruppen, og til den delgruppen som svarer til populasjonen i 2008. I boka refererer vi stort sett bare russiske resultater fra hele gruppen.

Hvis vi vil sammenlikne prestasjonene i matematikk for flere land i TIMSS Advanced, er det viktig å ha dekningsgraden i mente.

14.1.4 Analysenivåer

I TIMSS Advanced og TIMSS analyseres data på tre nivåer:

Systemnivå — intendert læreplan

Dette nivået gjelder utdanningssystemet slik det legges til rette av nasjonale og regionale myndigheter i et land. Det dreier seg om organisering av skoletilbudet, rammefaktorer, ressurstilgang og elevenes muligheter til skole- og fagvalg. Ikke minst dreier det seg om læreplaner og vurderingsformer. Det er slike faktorer som forteller hva slags utdanningstilbud samfunnet og myndighetene ønsker og planlegger at elevene skal få. Opplysninger på dette nivået er primært hentet inn fra de nasjonale prosjektlederne i de enkelte deltakerlandene.

Det er utgitt en ensyklopedi med beskrivelser av skolesystemene i alle deltakerlandene i TIMSS 2015 (Mullis, Martin, Goh & Cotter, 2016). Samtlige deltakerland i TIMSS Advanced 2015 er med der. Selv om hovedvekten i ensyklopedien er på grunnskolen (*primary education* og *lower secondary* *education*), kan den gi en viss støtte for å forstå ulikheter mellom landene på systemnivået. Dessuten inneholder den internasjonale rapporten for TIMSS Advanced 2015 (Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016b) ytterligere opplysninger om skolesystemene i deltakerlandene, med særlig vekt på videregående opplæring.

Klasseromsnivå — implementert læreplan

Dette nivået handler om hva som skjer i klasserommet, om undervisningen og læringsmiljøet. Hvordan blir intensjonene fra systemnivået omsatt i praksis? Hvordan blir den intenderte læreplanen iverksatt i skolen?

Både elevene, lærerne deres (i det faget elevene ble testet i) og skolelederne deres har svart på spørreskjemaer om situasjonen på skolen. Elevene ble blant annet spurt om hjemmebakgrunn, utdanningsplaner, trivsel på skolen, tidsbruk på skolearbeid og på arbeid utenom skolen, og om undervisningsmetoder i matematikk og fysikk. Lærerne ble blant annet spurt om alder, utdanning, erfaring som lærer, etter- og videreutdanning, faglige emner som er undervist, undervisningsmetoder, bruk av digitale verktøy, bruk og oppfølging av lekser, lærersamarbeid, trygghet og trivsel i jobben, og om eventuelle problemer i arbeidssituasjonen. Skolelederne ble blant annet spurt om utdanning og ledererfaring, skolens ressurser og begrensninger, elevenes bakgrunn, skolens vektlegging av matematikk og fysikk, eventuelle problemer med å rekruttere kvalifiserte lærere, og generelt om skolens miljø.

Elevnivå — resultert læreplan

Det siste nivået handler om hva som er oppnådd. Hvilke kunnskaper har disse elevene i matematikk og fysikk, og hvilke holdninger har de til fagene? Elevenes prestasjoner på den faglige testen ga informasjon om faglige kunnskaper og ferdigheter, mens elevspørreskjemaet ga informasjon om holdninger til fag og læring.

Med data på alle disse nivåene kan man beskrive og analysere situasjonen på en rekke måter. Vi kan studere forandringer i forhold til den forrige TIMSS Advanced-undersøkelsen. Vi kan sammenlikne elevprestasjoner i ulike land. Vi kan sammenlikne prestasjonene til jenter og gutter. Vi kan også analysere om det synes å være sammenheng mellom prestasjonene og noen av bakgrunnsvariablene, som for eksempel undervisningsmetoder, leksearbeid, lærernes utdanning eller elevenes hjemmebakgrunn.

14.2 Rammeverk og instrumenter

TIMSS Advanced baserer seg på et rammeverk som definerer hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene skal testes i. Rammeverket er utviklet gjennom en drøftingsprosess mellom deltakerlandene som leder fram mot konsensus om hva som utgjør sentrale kunnskaper og ferdigheter i faget sett i forhold til de respektive landenes læreplaner. Det foregår en viss justering foran hver undersøkelse, noe som er naturlig ettersom skolesystemer utvikler seg og læreplaner revideres. Men det er samtidig et poeng å holde rammeverket relativt stabilt for å gi et solid fundament for pålitelige sammenlikninger over tid.

14.2.1 Rammeverk

Rammeverket for TIMSS Advanced 2015 (Mullis & Martin, 2014) bygger på rammeverket for TIMSS Advanced 2008 (Garden et al., 2006). Det er et mål at rammeverket skal ligge så tett som mulig opp til de aktuelle læreplanene i deltakerlandene. Det er selvsagt umulig å få det til fullt ut; til det er læreplanene for ulike, spesielt når man kommer til de høyere trinnene i skoleverket. Derfor blir målet i stedet at ikke noe land skal oppleve at det blir et urimelig stort avvik fra deres læreplan. Vi skal helst alle sammen kunne si at testen i hovedsak faller inn under vår læreplan. Samtidig aksepterer vi at noen av oppgavene ikke passer godt i vårt land og at noen deler av vår læreplan ikke dekkes av testen. For å oppnå dette er det viktig at alle deltakerlandene gis anledning til å påvirke prosessen med utvikling av rammeverket, slik at man oppnår konsensus om det.

Rammeverket definerer de *faglige innholdskategoriene* som testoppgavene skal hentes fra. Disse kategoriene er organisert i noen temaområder. Samtidig oppgis det hvor stor andel av oppgavene som bør høre inn under hver av disse innholdskategoriene.

I tillegg inneholder rammeverket en beskrivelse av *kognitive kategorier*. Det er et mål at oppgavene skal stille ulike kognitive krav til elevene. Derfor angir rammeverket også hvor stor andel av oppgavene som bør ligge i hver av de kognitive kategoriene.

Innholdskategorier i matematikk

Innholdskategoriene i matematikk med anbefalt og faktisk fordeling av oppgavene er vist i tabell 14.3 Kategoriene og den anbefalte oppgavefordelingen er de samme som i 2008.

Tabell 14.3 Fordeling av matematikkoppgaver i TIMSS Advanced 2015 i innholdskategorier

Innholds-kategori	Anbefalt prosentandel av oppgavene	Faktisk prosentandel av oppgavene
Algebra	35 %	35 %
Kalkulus	35 %	36 %
Geometri	30 %	29 %

Tabell 14.4 viser hvilke temaområder som inngår i hver av innholdskategoriene.

Tabell 14.4 Temaområder i innholdskategoriene i matematikk i TIMSS Advanced 2015

Innholdskategori	Temaområder
Algebra	Uttrykk og operasjoner Likninger og ulikheter Funksjoner
Kalkulus	Grenseverdier Derivasjon Integrasjon
Geometri	Geometri uten og med koordinater Trigonometri

Fulle detaljer finnes i rammeverket (Mullis & Martin, 2014).

Kognitive kategorier i matematikk

TIMSS Advanced 2015 brukte de samme kognitive kategoriene og den samme anbefalte fordelingen av oppgaver som i 2008. Tabell 14.5 viser disse, samt den faktiske oppgavefordelingen i 2015.

Å *kunne* betyr blant annet å huske fakta, å gjenkjenne matematiske størrelser som er ekvivalente, å beherske algoritmer (som for eksempel løsning av enkle likninger og derivasjon av polynomfunksjoner), og å hente informasjon fra grafer

Tabell 14.5 Fordeling av matematikkoppgaver i TIMSS Advanced 2015 i kognitive kategorier

Kognitiv kategori	Anbefalt prosentandel av oppgavene	Faktisk prosentandel av oppgavene
Kunne	35 %	29 %
Anvende	35 %	41 %
Resonnere	30 %	30 %

og tabeller. Å *anvende* betyr blant annet å bruke kunnskapene og ferdighetene sine til å velge metoder og strategier, å representere matematisk informasjon på ulike måter, å modellere situasjoner, og å løse rutineoppgaver. Å *resonnere* betyr blant annet å tenke logisk, å analysere informasjon, å avgjøre hvilke framgangsmåter som trengs for å løse et problem, å kombinere ulike kunnskapselementer og representasjoner, å vurdere ulike strategier og løsninger, å trekke gyldige konklusjoner, å generalisere resultater, og å formulere matematiske argumenter og bevis.

Fulle detaljer finnes i rammeverket (Mullis & Martin, 2014).

Vi ser at testen inneholdt noen færre kunne-oppgaver og noen flere anvende-oppgaver enn planlagt. Det er vanskeligere å oppnå internasjonal enighet om den kognitive kategoriseringen enn den innholdsmessige. En oppgave som er klart rutinepreget i ett land – ut fra deres læreplan og undervisningstradisjoner – kan vurderes som en krevende problemløsingsoppgave med store utfordringer til resonnement i et annet land. Av den grunn har vi i denne boka valgt å legge liten vekt på å analysere resultatene i TIMSS Advanced basert på den internasjonale kategoriseringen av oppgavenes kognitive nivå.

Digitale hjelpemidler

Spørsmålet om å tillate bruk av kalkulator på testene har fulgt TIMSS og TIMSS Advanced i en årrekke. På 4. trinn har det aldri vært tillatt å bruke kalkulator. På ungdomstrinnet ble det imidlertid vanlig i mange land å introdusere kalkulatorbruk i undervisningen og til eksamen. For disse landene ville det være naturlig å tillate kalkulatorbruk også på tester. Andre land brukte ikke kalkulator i det hele tatt. Det kunne skyldes mangel på ressurser, men det kunne også være et pedagogisk begrunnet valg.

I TIMSS 2003 førte denne situasjonen til en ekstra studie knyttet til testen på 8. trinn. Elevene der fikk ikke bruke kalkulator på første del av testen, men fikk lov på siste del. Enhver oppgave var plassert i første del av noen oppgavehefter og i siste del av andre hefter. Dermed kunne man analysere effekten av å ha tilgang til kalkulator. Kalkulatorbruk ga signifikant utslag på prestasjonen på bare fem av i alt 194 oppgaver. Internasjonalt hadde 63 % av elevene tilgang til kalkulator under testen, men bare 15 % oppga at de hadde brukt den en del eller mye. I Norge hadde 80 % av elevene tilgang til kalkulator, men bare 8 % oppga at de hadde brukt den en del eller mye.

Med utgangspunkt i denne erfaringen ble det bestemt at kalkulatorbruk skulle være tillatt under hele testen på 8. årstrinn i TIMSS 2007. Dermed slapp elever som var vant til utstrakt kalkulatorbruk å føle at de ble satt i en uvant testsituasjon. Men mange oppgaver var konstruert slik at det ikke lå til rette for enkel kalkulatorbruk.

I TIMSS Advanced i 1995 var kalkulator tillatt. Det ble tidlig bestemt at kalkulator skulle være tillatt i 2008 også. En grunn til å tillate kalkulator var, som på 8. trinn, at elevene skulle kunne møte testen med de samme rammebetingelsene som de var vant til fra prøver og eksamener i egen skolegang. En annen begrunnelse var at for å kunne sammenlikne prestasjoner i 1995 og 2008, var det viktig å ha samme testbetingelser. De samme begrunnelsene har vært brukt for å tillate kalkulatorbruk også i 2015.

Den norske prosjektgruppen har problematisert denne argumentasjonen i forbindelse med TIMSS Advanced 2008 og 2015, spesielt når det gjelder matematikktesten. Vi pekte på den enorme teknologiske utviklingen på dette området fra 1995 til 2008. Kalkulatorer som var i vanlig bruk i undervisningen i en del land i 2008, kunne knapt sammenliknes med de som var tilgjengelige i 1995. Rammeverket for TIMSS Advanced 2008 erkjente denne problematikken: «it is noted that there have been tremendous changes in calculator technology since 1995» (Garden et al., 2006). Reglene for kalulatorbruk ble ikke endret, men ble presisert, og innspill fra norsk side førte til at en rekke oppgaver fikk spesielle koder for å avdekke bruk av kalkulator. I den norske matematikkrapporten for TIMSS Advanced 2008 ble norske elevers kalkulatorbruk drøftet (Grønmo, 2010; Onstad, 2010a; Pedersen, 2010). Et typisk trekk var at norske elever var gode til å bruke kalkulatoren i oppgavetyper som de umiddelbart gjenkjente. Derimot var evnen til kreativ kalkulatorbruk påfallende lav, selv i relativt enkle oppgaver. Dette ble ytterligere beskrevet og analysert i en masteroppgave (Sandstad, 2012).

Etter TIMSS Advanced 2008 har den teknologiske utviklingen fortsatt. I Norge er det mange elever som ikke lenger har kalkulator, men bruker programvare på en bærbar datamaskin (f.eks. GeoGebra). Samtidig er vilkårene for bruk av digitale hjelpemidler til eksamen endret. Nå er matematikkeksamener todelte; i del 1 er ingen hjelpemidler tillatt, mens det i del 2 forutsettes at elevene viser ferdigheter i bruk av relevant programvare. I utviklingen av matematikktesten til TIMSS Advanced 2015 ble det forsøkt å lage mange «kalkulatornøytrale» oppgaver, det vil si oppgaver der digitale hjelpemidler ville være til liten nytte.

Det planlegges nå en overgang til tester i TIMSS og TIMSS Advanced på digitale plattformer. I TIMSS for 4. og 8. trinn vil dette bli innført allerede i 2019. Bruken av eventuelle hjelpemidler i oppgaveløsingen vil da kunne styres på en helt annen måte enn hittil.

14.2.2 TIMSS Advanced og deltakerlandenes læreplaner

Et av målene med rammeverket for TIMSS Advanced er – som nevnt i det foregående – å sikre at elevene i ethvert deltakerland blir testet i oppgaver som i hovedsak faller innenfor landets læreplan. På grunn av de mange forskjellene mellom landene vil det alltid være en del oppgaver som ikke passer i enkelte land, men litt upresist kan man formulere det som et mål at testen skal være omtrent like «rettferdig» eller «urettferdig» i alle land.

Det matematiske innholdet i TIMSS Advanced er sammenliknet med de enkelte lands læreplaner på tre måter. For det første er innholdsbeskrivelsen i rammeverket holdt opp mot læreplanen (den intenderte). Som vi har beskrevet i delkapittel 14.2.1, er hver innholdskategori definert ved beskrivelse av en del faglige temaområder. Hvert temaområde er sammenliknet med læreplanen. Men siden det bare er 8 temaområder totalt i matematikk, vil hvert temaområde omfatte flere enkelttemaer, og det kan derfor være vanskelig å avgjøre om et område i hovedsak faller inn under landets læreplan eller ikke.

For det andre har lærerne blitt spurt om hvilke temaer de har undervist sine klasser i. Det gir oss informasjon om rammeverkets forhold til den implementerte læreplanen. Tabell 14.6 viser hvor stor andel av elevene som var blitt undervist i temaene i rammeverket før de tok testen — i snitt for hele testen, og for hver innholdskategori.

Tabell 14.6 Prosent av elevene som ifølge lærerne har blitt undervist i temaene i rammeverket for matematikk i TIMSS Advanced 2015 (gjennomsnittsverdier for samtlige temaer og for temaene i hver innholdskategori)

Land*	Alle temaer (19)	Algebra (8 temaer)	Kalkulus (7 temaer)	Geometri (4 temaer)
Frankrike	93	98	85	97
Italia	91	89	94	92
Libanon	98	98	98	99
Norge	92	84	98	99
Portugal	91	93	85	100
Slovenia	95	99	88	100
Sverige	94	90	96	97
USA	96	98	96	91

* Data for Russland var ikke tilgjengelige

Den laveste undervisningsdekningen har Norge med 84 % i algebra, tett fulgt av Frankrike og Portugal med 85 % i kalkulus. Det lave tallet til Norge skyldes i særlig grad temaet komplekse tall, og til en viss grad temaet følger og rekker. Samlet for hele rammeverket har samtlige land over 90 % undervisningsdekning.

Merk at tabell 14.6 antyder hvor godt rammeverket til TIMSS Advanced passer til et lands læreplan. Den viser derimot ikke det omvendte, nemlig hvor godt landets læreplan passer til rammeverket. Det vil si at dersom et faglig tema i rammeverket ikke er med i et lands læreplan, fanges det opp i tabellen. Men hvis det er temaer i landets læreplan som ikke er med i rammeverket, vises det ikke. Et eksempel på dette fra den norske læreplanen er emneområdet sannsynlighet.

I tillegg til disse sammenlikningene er hver enkelt testoppgave i TIMSS Advanced 2015 vurdert opp mot læreplanen i det enkelte land. Slik er det registrert hvilke av oppgavene i testen som er dekket av læreplanen og hvilke som må sies å ligge utenfor.

Tabell 14.7 viser sammenhengen mellom oppgavene og læreplanene, og hvilke utslag dette har gitt for prestasjonene.

Vi ser at testen passet ganske bra i de fleste landene, i den forstand at de aller fleste oppgavene ligger innenfor de respektive landenes læreplaner. Det eneste landet som skiller seg ut, er Russland med bare 91 av 120 testpoeng innenfor sin læreplan. Likevel gjorde de russiske elevene det godt på testen.

Tabell 14.7 Samsvar mellom matematikkoppgavene i TIMSS Advanced 2015 og landenes læreplaner. Prosent riktig på hele testen og på den delen av testen som faller innenfor det enkelte lands læreplan

Land	Antall poeng* innenfor læreplanen (av 120 poeng totalt)	Gjennomsnittlig prosent riktig på hele testen	Gjennomsnittlig prosent riktig på «egen del» av testen
Libanon	112	50	51
Russland	91	43	44
USA	119	43	43
Portugal	111	40	42
Norge	118	37	37
Slovenia	119	37	37
Frankrike	109	36	36
Sverige	111	33	32
Italia	117	31	32

* *De aller fleste oppgavene i testen har ett oppnåelig poeng, mens noen få oppgaver har to poeng. Derfor er totalt antall oppnåelige poeng litt større enn antall oppgaver.*

Testen passet aller best i USA og Slovenia, der bare 1 testpoeng falt utenfor læreplanen. Tett etter følger Norge med 2 testpoeng utenfor vår læreplan; disse oppgavene handlet om komplekse tall.

Den midterste tallkolonnen viser hvor mange prosent av de 120 poengene elevene i hvert land skåret i gjennomsnitt. Best denne gangen var Libanon, der elevene i gjennomsnitt greide halvparten av oppgavene. Sist kom Italia og Sverige med bortimot en tredel av oppgavene korrekt. Det kan virke lite med 50 % korrekt på topp. Da må vi huske at dette er gjennomsnittet for alle elevene; de beste har selvsagt skåret langt høyere. I 2008 hadde Libanon 53 % korrekt (Onstad, 2010b, s. 251). Da var Russland best med 57 %. Men den gangen deltok Russland bare med en liten, svært elitepreget elevgruppe (dekningsgrad 1,4 %).

Dersom man likevel føler at dette må ha vært en vanskelig test, er det viktig å være klar over at det kompenseres for vanskelighetsgrad når testresultatene innpasses på den internasjonale trendskalaen med midtpunkt 500. (Mer om dette i delkapittel 14.3.6 om skalering.)

Viktigst er det kanskje å sammenlikne de to siste kolonnene. Mens den første viser hvor godt elevene i et land gjorde det på hele matematikktesten i TIMSS Advanced 2015 (hvor mange prosent av de 120 poengene de greide), viser den siste kolonnen hvor mange prosent av poengene de greide på den delen av testen som lå innenfor dette landets læreplan. Det er slående hvor stor overensstemmelse det er mellom de to kolonnene. Størst forskjell har Portugal, som går opp 2 prosentpoeng fra hele testen til sin «egen del» av testen. Fire av landene, deriblant Norge, har ingen endring. Dermed blir det vanskelig å bruke argumenter om at testen er mer «urettferdig» for noen av deltakerlandene enn for andre.

14.2.3 Oppgaver

Når TIMSS utvikler oppgaver til undersøkelsene sine, tar de mange hensyn (Mullis et al., 2005):

- Oppgavene skal ligge innenfor læreplanen i de fleste deltakerlandene.
- Oppgavene skal kunne forsvare sin posisjon i en framtidig utvikling av matematikk og naturfag (fysikk i TIMSS Advanced) i skolen.
- Oppgavene skal være godt tilpasset de deltakende elevenes alderstrinn.
- Oppgavene skal fungere teknisk godt i en storskalaundersøkelse.
- Oppgavene skal fordele seg på innholdskategoriene og de kognitive kategoriene i samsvar med prosentangivelsene i rammeverket. (Se delkapittel 14.2.1.)

Oppgavene skal også fungere relativt godt i alle land, basert på resultatene fra piloteringen som gjennomføres året før hovedundersøkelsen. Videre er det et mål å få en balansert fordeling mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver.

Punktet om å «fungere teknisk godt» betyr blant annet at en oppgave skal *diskriminere* godt, det vil si at den skal skille mellom sterke og svake elever. For å få høy reliabilitet på testen som helhet er det i tillegg viktig å ha oppgaver med ulik vanskegrad.

TIMSS Advanced er en *trendstudie*. Det betyr at den legger til rette for sammenlikning over tid. Et utvalg av oppgavene i TIMSS Advanced 1995 ble ikke offentliggjort, men lagt til side for gjenbruk i den neste TIMSS Advanced-studien i 2008. Dette er *trendoppgavene*, som knytter de to studiene sammen og gjør det mulig å sammenlikne prestasjonene. Tilsvarende skjedde i neste runde. Omtrent halvparten av oppgavene i 2008 ble hemmeligholdt og brukt som trendoppgaver i 2015.

Trendoppgavene fra TIMSS Advanced 2008 lå altså fastlagt som et utgangspunkt. Deretter var det behov for å utvikle mange nye oppgaver, slik at det samlede oppgavetilfanget fylte kriteriene ovenfor. Deltakerlandene ble invitert til å levere forslag til nye oppgaver. Oppgaveforslagene ble sendt til en internasjonal ekspertkomité hvor de ble vurdert mot rammeverket. Lå en oppgave utenfor rammeverket, ble den enten modifisert eller forkastet. Falt den innenfor, ble den plassert i en innholdskategori og en kognitiv kategori. Den internasjonale ekspertkomiteen hadde ansvaret for at det var tilstrekkelig med oppgaver innen de ulike faglige og kognitive områdene, at det var en akseptabel fordeling i oppgavenes vanskegrad, og at det var et passende forhold mellom flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. Den hadde også ansvaret for beskrivelsene av de ulike *kompetansenivåene*. To norske forskere deltok aktivt i dette arbeidet med matematikkoppgavene.

Den store «oppgavebanken» som ble utviklet på denne måten, ble grundig gjennomgått. Fra denne valgte man ut omtrent dobbelt så mange oppgaver som man trengte til testen. Disse oppgavene ble utprøvd internasjonalt våren 2014. Resultatene i denne pilottesten ga grunnlag for å gjøre det endelige utvalget av oppgaver til selve TIMSS Advanced-undersøkelsen i 2015. Oppgaveutvalget ble diskutert internasjonalt med representanter fra alle deltakerlandene.

De utvalgte oppgavene er fordelt i såkalte *blokker*. En blokk består enten av trendoppgaver fra forrige runde eller av nye oppgaver som er prøvd ut i pilottesten. Blokkene er relativt like i arbeidsmengde og vanskegrad. Hver blokk inneholder omtrent 10 oppgaver og er anslått til å kreve 30 minutters arbeid for elevene.

I 2008 var det 7 blokker med matematikkoppgaver og 7 blokker med fysikkoppgaver. Av disse var 3 stykker i hvert fag trendblokker fra 1995. Antallet ble økt til 9 blokker i hvert fag i 2015. Begrunnelsen var at med flere oppgaver fikk man dekket rammeverket bedre. I hvert fag var det slik at 3 av blokkene inneholdt trendoppgaver fra 2008, mens de andre 6 blokkene inneholdt nye oppgaver. Fem av blokkene i hvert fag i 2015 blir nå hemmeligholdt slik at de kan brukes som trendblokker i neste runde av TIMSS Advanced.

14.2.4 Koder

Omtrent halvparten av oppgavene i TIMSS Advanced er *flervalgsoppgaver*. I slike oppgaver får elevene fire svaralternativer å velge mellom: A, B, C eller D. (I 1995 var det fem svaralternativer.) Eleven skal markere hvilket av svarene hun eller han mener eller tror er det riktige.

Det ligger et grundig arbeid bak konstruksjon av flervalgsoppgaver. Det er viktig at ett av svaralternativene er riktig, og at ingen av de andre er det. De gale alternativene kalles *distraktorer*. Gode distraktorer bør avspeile typiske misoppfatninger, regnefeil eller liknende. En distraktor som knapt velges av noen av elevene, er ikke ønskelig. Det er heller ikke ønskelig at en distraktor skal «lokke» eller «lure» elevene til å gi galt svar. For å finne gode distraktorer prøver man ofte ut oppgavene som åpne oppgaver først. De elevsvarene man da får, danner utgangspunkt for konstruksjon av distraktorer.

En flervalgsoppgave er enkel å kode etterpå. Det er én tallkode for hvert av svarene A, B, C og D (og eventuelt E). Det er også spesielle koder for elever som har svart på en gal måte – for eksempel markert to svar – eller ikke har svart i det hele tatt. Disse kodene registreres i en database som deretter kan behandles med statistisk programvare.

For de *åpne oppgavene* er kodingen mye mer krevende. Åpne oppgaver kalles *constructed response items* på engelsk. Det er altså oppgaver hvor eleven ikke skal velge mellom ferdigformulerte svarforslag, men må formulere svaret selv. Svaret som kreves, kan være av ulikt format. Det kan for eksempel dreie seg om å skrive ned bare et tall eller et ord, eller oppgaven kan kreve at eleven viser utregningen, redegjør for framgangsmåten, gir en begrunnelse eller forklarer et resonnement.

Gjennom utprøving av oppgavene danner man seg et inntrykk av hvordan de blir besvart. Dersom det viser seg at det er noen karakteristiske forskjeller mellom svarene, kan det ha diagnostisk interesse å gi visse svarkategorier særskilte koder. Det kan gi mulighet til å analysere både *hva* og *hvordan* elevene har svart på oppgaven. I TIMSS har man utviklet et tosifret kodesystem for å ta vare på slik informasjon. Norske forskere sto sentralt i denne utviklingen (se Lie, Angell & Rohatgi, 2010, s. 42).

Hvis en oppgave bare har ett riktig svar, gis det kode 10 for dette svaret. Dersom det er flere svar som anses som korrekte, eller dersom det er ulike måter å komme fram til svaret på, er det mulig å kode med for eksempel 10, 11 og 12. Hver kode er definert gjennom en beskrivelse (og eventuelt eksemplifisering) av hvilke typer elevsvar som skal falle inn under denne koden. Feilsvar kodes konsekvent på 70-tallet. Dersom det er interessant å skille mellom ulike feilsvar, kan de gis kode 70, 71 osv. Alle andre feilsvar får kode 79. Helt blanke oppgaver får kode 99.

Riktig svar på en slik oppgave (kode 10, 11, . . .) gir *ett poeng*.

Noen oppgaver er mer komplekse, og det er naturlig å kunne skille mellom helt eller delvis riktig svar. Da vil kodene 20, 21, 22 osv. betegne ulike typer korrekte svar, mens 10, 11, 12 osv. betegner ulike typer delvis korrekte svar.

Helt riktig svar på en slik oppgave gir *to poeng*, mens delvis riktig svar gir *ett poeng*.

Poengene gir grunnlag for å beregne prestasjonene, mens kodene for øvrig muliggjør nærmere studier av elevenes kunnskaper og strategivalg.

14.2.5 Spørreskjemaer

Hver elev som deltok i TIMSS Advanced, svarte på et *elevspørreskjema* i tillegg til den faglige testen. Lærerne til disse elevene (i det faget de ble testet i) fikk dessuten et eget *lærerspørreskjema*, og skolens ledelse fikk et *skolespørreskjema*. Gjennom skjemaene ble det samlet inn en rekke opplysninger om holdninger, hjemmebakgrunn, undervisningsmetoder, skolens ressurser med mer.

Spørreskjemaene i TIMSS Advanced 2015 gikk også gjennom en ekspertvurdering og en grundig internasjonal debatt før de ble ferdigstilt. Alle deltakerlandene hadde en demokratisk mulighet til å foreslå endringer og tillegg.

Det var mulig for land å sløyfe enkelte spørsmål som ble ansett som irrelevante for deres utdanningssystem, eller å legge til spørsmål som utdanningsmyndighetene eller den nasjonale prosjektgruppen fant interessante. Svarene på slike spørsmål blir ikke tatt med i den internasjonale rapporten.

14.2.6 Oversetting

Det internasjonale arbeids- og samarbeidsspråket i TIMSS er engelsk. Alle offisielle dokumenter, instruksjoner, oppgaver og spørreskjemaer foreligger på engelsk. Men når undersøkelsen gjennomføres, må oppgavene og spørreskjemaene foreligge på de språkene som brukes i skolene i de respektive landene. Elevene, lærerne og skolelederne skal møte oppgavene og spørsmålene på et språk de er vant til, ellers vil internasjonale sammenlikninger gi liten mening.

Oversetting er imidlertid vanskelig. For det første må det sikres at det spørres om nøyaktig det samme på alle språk. Videre bør oppgavene være like vanskelige, noe som ikke er opplagt når de reformuleres på et nytt språk. Noen enkle eksempler kan illustrere dette. Spørsmålet «What does a carnivore eat?» oversettes naturlig til «Hva spiser en kjøtteter?» på norsk. Vi ser at mens engelsk bruker et vanskelig fremmedord, bruker norsk et selvforklarende ord. Det norske spørsmålet blir dermed lettere enn det engelske. Andre ganger ligger engelsk fagterminologi nærmere allmennspråket enn tilsvarende norske faguttrykk gjør. «Multiply» inngår i engelsk hverdagsspråk og kan bety «mangfoldiggjøre» eller «formere seg», mens «multiplisere» knapt brukes utenfor matematikken på norsk. En regulær trekant vil på enkelte språk kalles «likesidet» og på andre språk «likevinklet». Å være likesidet eller likevinklet er ekvivalent for trekanter (men ikke for firkanter!). Det er like fullt to ulike opplysninger om trekanten som formidles gjennom disse betegnelsene, og i noen oppgaver kan det spille en rolle for løsningen.

I tillegg vil skifte av språk mange ganger gå sammen med skifte av kultur, tradisjoner, miljø og erfaringsverden. Slike ting kan også spille en rolle for hvordan situasjoner og spørsmål oppfattes. Sammen med oversettingen bør man derfor være oppmerksom på om dette kan skape ulikheter mellom elevene i forskjellige land. En matematisk modell for isbjørnpopulasjoner kan virke mer fremmedartet i Afrika enn i Norge.

TIMSS har omfattende rutiner for oversetting og språkkontroll. I Norge utarbeides alle instrumentene (testene og spørreskjemaene) for grunnskolen på både bokmål og nynorsk. Det brukes moderate språkformer, slik at instrumentene blir nokså like i de to målformene. I TIMSS Advanced 2015 brukte vi en annen tilnærming. Der lot vi noen av oppgaveblokkene være på bokmål og de andre på nynorsk. Det betydde at hver elev fikk oppgaver på begge målformer. Vi hadde myndighetenes støtte for dette, og det var nesten ingen elever som reagerte. Vi gjorde det samme med spørreskjemaene; noen av dem ble formulert på bokmål, andre på nynorsk. Oversettelsesforslagene våre ble sendt til IEA, som sendte dem videre til en norsk språkekspert som var ukjent for prosjektgruppen i Norge. Kommentarene og forslagene fra eksperten ble sendt via IEA tilbake til Norge, der prosjektgruppen gjennomgikk dem, vurderte dem fra en faglig og språklig synsvinkel og foretok nødvendige forbedringer av tekstene.

Det er også viktig at layout på oppgaver og hefter er så lik som mulig i alle land. Alle heftene sendes derfor til internasjonal godkjenning av layout før de trykkes.

14.2.7 Hefter

Oppgavene ble, som nevnt ovenfor, fordelt i 9 blokker i hvert fag. Blokkene hadde omtrent like mange oppgaver og like stor vanskegrad og arbeidsmengde. Blokkene ble kalt M1, M2, . . ., M9. Blokkene M1, M3 og M5 var trendblokker fra 2008. De øvrige seks blokkene inneholdt nye oppgaver som var utarbeidet til studien i 2015.

Den totale arbeidsmengden for alle blokkene ville bli altfor stor for en enkelt elev, anslagsvis $4\frac{1}{2}$ time (pluss nok en halvtime til spørreskjemaet). Det er behov for å bruke mange oppgaver for å gi en bred dekning av innholdskategoriene i rammeverket. Hver enkelte elev får imidlertid bare et utvalg av alle oppgavene som er med i testen. Blokkene er fordelt på seks forskjellige hefter. Hvert hefte inneholder tre blokker, som tilsvarer en estimert arbeidsmengde på halvannen time. Tabell 14.8 viser hvordan blokkene ble fordelt på heftene.

Tabell 14.8 Fordeling av blokker i hefter. Trendblokkene er rødmerket.

Hefter		Blokker	
Hefte 1	M1	M2	M4
Hefte 2	M4	M3	M6
Hefte 3	M6	M7	M5
Hefte 4	M3	M8	M7
Hefte 5	M8	M5	M9
Hefte 6	M2	M9	M1

Vi ser at hvert hefte inneholder én trendblokk og to nye blokker. Vi ser videre at hver blokk forekommer i to hefter, og på ulike plasser i de to heftene (først/midt/sist). Elevenes prestasjoner kan nemlig påvirkes av om en oppgave ligger tidlig eller sent i heftet. Mot slutten av en test er elevene ofte mer slitne og mindre konsentrerte.

Hver elev fikk altså ett hefte. Den enkelte elev fikk dermed prøve seg på en tredel av oppgavene i studien. TIMSS Advanced er derfor lite egnet til å si noe om den enkelte elev; studien er designet for å kunne trekke relativt sikre konklusjoner om hele den nasjonale populasjonen eller store deler av denne.

Alle oppgaveheftene i TIMSS inneholdt en kortfattet instruksjon til elevene om hvordan de ulike oppgavetypene – det vil si flervalgsoppgaver og åpne oppgaver – skulle besvares. Det var en kort formelsamling i begynnelsen av hvert hefte. Denne er gjengitt i et appendiks bakerst i boka.

14.3 Gjennomføring

TIMSS har utviklet grundige prosedyrer for å sikre en ensartet gjennomføring av undersøkelsen i alle deltakerlandene. Prosedyrene er nøye beskrevet i manualer for gjennomføringen av ulike deler av studien. En teknisk rapport er publisert av det internasjonale prosjektsenteret (Martin, Mullis & Hooper, 2016).

14.3.1 Tidspunkt

TIMSS Advanced-undersøkelsen skulle gjennomføres i slutten av det siste året i videregående skole. Det betydde våren 2015 innenfor tidsrammer som var fastsatt sentralt.

14.3.2 Utvalg

Bare et utvalg av elevene i hvert deltakerland blir testet. Dette utvalget trekkes ut etter bestemte statistiske regler og prosedyrer. For å kunne gjøre generaliseringer fra utvalget til hele populasjonen med liten usikkerhet (små feilmarginer), ble det satt som mål at utvalgene burde omfatte 3600 elever i hvert fag. Dette målet gjaldt i utgangspunktet alle land. At kravet til utvalgsstørrelsen er uavhengig av størrelsen på populasjonen, kan begrunnes statistisk, men vi går ikke inn på det her. For små land kunne ikke disse målene nås, og prosedyrer og mål måtte modifiseres. Av de 264 aktuelle videregående skolene i Norge ble 134 trukket ut til å delta i matematikk, og de andre 130 til å delta i fysikk. Den norske prosjektgruppen fant det ikke ønskelig at skoler skulle bes om å delta i begge studiene. Det ville lett føre til at samme elev måtte delta i begge studiene, siden svært mange av fysikkelevene også tar matematikk. Det ville være en urimelig belastning relativt kort tid før avsluttende eksamen. På skoler som ble trukket ut i matematikk, var alle elevene i Matematikk R2 med i utvalget, og på skoler som ble trukket ut i fysikk, var alle elevene i Fysikk 2 med i utvalget.

Den nasjonale prosjektgruppen kontaktet alle de uttrukne skolene med en oppfordring om å delta i undersøkelsen. Av de 134 skolene som ble bedt om å delta i matematikk, svarte 133 ja. Av de aktuelle elevene på disse skolene deltok 93 %. Av de 130 skolene som ble bedt om å delta i fysikk, var det 127 som svarte ja. Av de aktuelle elevene på disse skolene deltok 94 %. Det gir en samlet deltakelsesprosent på 93 % i både matematikk og fysikk. Til sammen deltok 2537 norske elever i matematikkundersøkelsen og 2472 i fysikkundersøkelsen.

TIMSS hadde detaljerte regler for hvordan disse utvalgene skulle trekkes. I tillegg var det strenge krav til deltakelsesprosentene for å anerkjenne utvalgene som *representative*. Norge tilfredsstilte disse kravene med god margin.

Dersom et utvalg er trukket *tilfeldig* og har en viss størrelse, regnes det som *representativt*, det vil si at det avspeiler situasjonen i hele populasjonen. I vårt tilfelle ville tilfeldig utvalg bety at enhver R2-elev i landet hadde samme sannsynlighet for å bli med i utvalget (og tilsvarende i fysikk). Dette var ikke tilfellet i TIMSS Advanced. Skolene hadde ikke samme sannsynlighet for å bli trukket ut, siden skoler som ikke hadde Fysikk 2 nødvendigvis måtte være med i matematikkutvalget. Dessuten var det ulikt antall elever fra skole til skole. Men i etterkant var det mulig å beregne hvor stor sannsynligheten for å bli trukket ut hadde vært for hver enkelt elev i utvalget. Disse sannsynlighetene ble brukt til å beregne hvor mange elever i populasjonen den enkelte elev i utvalget kunne sies å representere. Dermed kunne elevene tildeles *vekter* som tilsvarte denne representativiteten. På tilsvarende måte ble det beregnet vekter for skolene i utvalgene. Dataanalysene benytter disse vektene.

På denne måten fikk vi et representativt utvalg av skoler og et representativt utvalg av elever. Utvalget av lærere ble derimot *ikke* trukket tilfeldig. Lærerne fulgte med som et «attributt» til elevutvalget – det var de utvalgte klassenes lærere som deltok i undersøkelsen. Strengt tatt betyr det at lærerutvalget ikke med sikkerhet kan anses som representativt for hele lærerpopulasjonen; det er derfor litt mer usikkert å generalisere fra det. Men siden lærerutvalget omfatter så mange av de aktuelle lærerne – og det er et biprodukt av en tilfeldig utvalgsprosess – kan det vanskelig tenkes betydelige feilutslag om man antar at de på en god måte representerer samtlige lærere i dette faget. Vi kan anse lærerutvalget som «tilstrekkelig tilfeldig» til at vi kan generalisere fra det. Derfor tillater vi oss å bruke uttrykk av typen «23 % av de norske R2-lærerne» og liknende uttrykksmåter når vi strengt tatt burde ha skrevet «lærerne til 23 % av R2-elevene i Norge».

Vektingen av dataene ble beregnet av datasenteret til IEA. Dette blir beskrevet i den internasjonale tekniske rapporten til TIMSS Advanced 2015 (Martin et al., 2016).

Skolene som hadde sagt seg villige til å delta, sendte inn anonymiserte lister over de uttrukne elevene. Prosjektgruppen brukte et dataprogram spesiallaget for TIMSS Advanced til å trekke ut hvilken elev som skulle ha hvilket oppgavehefte.

14.3.3 Gjennomføring på skolene

Det internasjonale prosjektsenteret hadde utarbeidet detaljerte instrukser for hvordan testen skulle gjennomføres i klasserommet. Det var gjort for å sikre like testvilkår for alle elever, både nasjonalt og internasjonalt.

Alt elevmateriell ble sendt til skolene litt før undersøkelsen skulle gjennomføres. Materiellet besto av oppgavehefter og spørreskjemaer til elevene, samt instrukser for gjennomføringen. En av de tilsatte på skolen var ansvarlig for å sette seg inn i instruksene på forhånd og å påse at de ble fulgt nøye.

På den avtalte testdagen ble elevene samlet i klasserommet eller et annet egnet rom. Elevene fikk hvert sitt oppgavehefte. Hvem som skulle ha hvilket hefte, var angitt med en kodet klistrelapp foran på heftet. Dersom en elev ikke møtte, ble vedkommendes hefte inndratt. Dersom en frammøtt elev burde ha tilhørt utvalget, men ikke var registrert, ble vedkommende registrert og fikk et ekstrahefte som var klargjort for slik bruk. Elevene fikk ikke lov til å åpne heftene før de fikk beskjed om å gjøre det.

Elevene fikk opplest informasjon om testen og om gjennomføringen, og eksemplene forrest i heftene ble gjennomgått. Deretter fikk de nøyaktig 90 minutter til å løse oppgavene. Etterpå besvarte elevene spørreskjemaet.

Den internasjonale TIMSS-ledelsen hadde knyttet til seg én person i hvert land som kontrollerte gjennomføringen på en del tilfeldig valgte skoler. Vedkommende var uavhengig av den nasjonale prosjektgruppen og rapporterte direkte til den internasjonale ledelsen ved hjelp av et grundig rapporteringsskjema.

Den ansvarlige personen for gjennomføringen på den enkelte skole sendte alt materiellet tilbake til den nasjonale prosjektgruppen. Det ble kontrollert at ingen oppgavehefter forsvant i prosessen.

Spørreskjemaene til lærerne og skolelederne ble distribuert og utfylt på nett.

14.3.4 Koding

All informasjon fra oppgaveheftene og de ulike spørreskjemaene ble registrert i en databank. I prinsippet er det enkelt å kode svarene på flervalgsoppgavene og på spørsmålene i spørreskjemaene. Da skal det bare registreres hvilket svaralternativ vedkommende har valgt. På den annen side er det selvsagt mulig å gjøre tastefeil ved innskrivingen. I Norge ble dette lest og registrert elektronisk fra skannede versjoner av elevenes oppgavehefter.

Når det gjelder de åpne oppgavene er situasjonen mer krevende, noe som går fram av redegjørelsen for kodesystemet i delkapittel 14.2.4 ovenfor. Koden settes altså etter en subjektiv vurdering av elevens svar. Skal analyser av elevprestasjonene være pålitelige (reliable), må denne kodingen av åpne oppgaver utføres så likt som mulig av alle kodere i samtlige deltakerland. Det nedlegges et stort arbeid for å sikre dette best mulig. De tillatte kodene på en oppgave er utførlig beskrevet i de internasjonale kodemanualene Dette materiellet var grundig gjennomgått på en internasjonal samling. I det enkelte land ble kodedefinisjonene nøye gjennomgått i fellesskap før kodingen startet. Eventuelle uklarheter ble drøftet og avklart, i noen tilfeller i samråd med den internasjonale TIMSS-ledelsen. For mange av oppgavene var det utarbeidet et eksempelmateriell som illustrerte hvordan kodene skulle brukes. Dette ble gjennomgått og kommentert i fellesskap. I tillegg var det ofte øvingsoppgaver som alle koderne skulle vurdere hver for seg. Etterpå sammenliknet man de kodene man hadde valgt, drøftet vurderingene og holdt disse opp mot en internasjonal «fasit» som fastslo hvordan kodene skulle brukes på øvingsoppgavene. I noen land, blant annet Norge, var elevbesvarelsene skannet inn, og kodingen ble utført ved skjerm og tastatur.

Som en ytterligere kontroll ble det gjort tre typer ekstra koding:

- Omtrent en tredel av heftene var trukket ut til *reliabilitetskoding*, det vil si at to personer kodet disse heftene uavhengig av hverandre. På denne måten kunne man statistisk måle den nasjonale *sensorreliabiliteten*, det vil si graden av samsvar mellom koderne (sensorene) i et land.
- En del engelskspråklige elevbesvarelser var plukket ut til å bli kodet av to kodere fra hvert eneste deltakerland. På denne måten kunne man statistisk måle sensorreliabiliteten mellom land.
- En del besvarelser fra TIMSS Advanced 2008 på trendoppgaver som ble brukt på nytt i 2015, var plukket ut til å bli kodet av to kodere fra hvert land. På denne måten kunne man statistisk måle sensorreliabiliteten over tid.

14.3.5 Databehandling

De innlagte dataene ble kontrollert i flere omganger, først i Norge og deretter i det internasjonale datasenteret til TIMSS. Dataene ble «vasket», det vil si at man lette etter inkonsistente og overraskende data. Disse ble så kontrollert mot oppgaveheftene og spørreskjemaene. Prosedyrene skal sikre høy grad av samsvar mellom det elevene, lærerne og skolelederne faktisk hadde svart, og de dataene som ble lagret elektronisk.

Da datavaskingen var avsluttet, ble alle forbindelser mellom de elektroniske dataene og deltakerne i undersøkelsen slettet. Dermed lar det seg ikke gjøre å spore enkeltresultater tilbake til elever eller skoler. Prosedyrene var i Norge godkjent av Datatilsynet.

14.3.6 Skalering

Avanserte statistiske metoder er brukt for å behandle dataene på en måte som muliggjør sammenlikninger. Dette blir grundig beskrevet i den internasjonale tekniske rapporten (Martin et al., 2016).

Som nevnt ovenfor svarte hver enkelt elev bare på en tredel av det samlede oppgavetilfanget. Prestasjonene til to elever som hadde samme hefte, kan sammenliknes. To elever som fikk forskjellige hefter, fikk derimot helt eller delvis forskjellige oppgaver, og da kan ikke prestasjonene uten videre sammenliknes. Tilsvarende kan prestasjoner i 2015 ikke uten videre sammenliknes med prestasjoner i 2008.

Disse problemene løses ved hjelp av blokker som er felles mellom hefter og mellom de to undersøkelsene. Disse blokkene fungerer som «broer» som knytter de enkelte delene sammen.

La oss eksempelvis se på en elev, vi kaller henne Helga, som fikk hefte 2 i matematikktesten. Hefte 2 inneholdt blokkene M4, M3 og M6 (se tabell 14.8 på side 290). Blokk M4 fantes også i hefte 1. Med kunnskap om hvordan Helga presterte på blokk M4, og ut fra det statistiske materialet om hvordan elevene som fikk hefte 1, presterte, kan vi anslå hvordan Helga ville ha gjort det på blokkene M1 og M2 dersom hun i stedet hadde fått hefte 1. På samme måte kan vi ved hjelp av blokk M6 anslå hvordan hun ville ha gjort det i hefte 3, og ved hjelp av blokk M3 anslå hvordan hun ville ha gjort det i hefte 4. Og med denne kunnskapen og disse anslagene kan vi videre anslå hvordan hun ville ha gjort det i heftene 5 og 6.

Et slikt resonnement er ganske usikkert for én enkelt elev. Men tilknytningen til de virkelige elevene er kuttet – det finnes ingen «Helga». Dataene kan ikke brukes til å si noe om enkeltelever. De blir bare anonyme representanter som kan hjelpe oss til å si noe om den nasjonale populasjonen eller deler av denne.

På grunn av usikkerheten blir det kjørt flere simuleringer ut fra prestasjonene til Helga i hefte 2 og anslagene for hvordan hun kunne ha gjort det på oppgavene i resten av blokkene. Disse simuleringene produserer fem verdier som representerer hva Helga kunne ha skåret totalt dersom hun hadde tatt hele testen. Disse verdiene kalles *plausible verdier*. Variasjonen mellom de plausible verdiene er et uttrykk for usikkerheten i anslagene. Det regnes ut fem plausible verdier for hver eneste elev som deltok i testen. De fleste statistiske analysene som tar for seg elevenes skår på testen (for eksempel i forhold til en bakgrunnsvariabel) benytter alle de plausible variablene. Det minsker usikkerheten i resultatene.

Når samtlige elever på denne måten har fått plausible verdier for sine prestasjoner, kan man regne ut gjennomsnittsskår og standardavvik for utvalget og bruke det til å generalisere til hele populasjonen eller til deler av denne. For alle slike generaliserte verdier er det beregnet *standardfeil*, som brukes til å avgjøre om forskjeller er *signifikante*.

Alle enkeltskårene ligger spredt omkring gjennomsnittet på en skåringsakse. Da er det mulig å justere selve måleaksen. På samme vis som vi kan regne om temperaturer mellom celsius-verdier og fahrenheit-verdier, kan vi regne om skårene til nye verdier langs en ny skala. Vi får andre tall og et annet nullpunkt, men det er fortsatt den samme statistiske fordelingen.

En slik *skalering* ble gjort med dataene i TIMSS Advanced 1995. Elevskårene i alle deltakerlandene ble regnet om til en ny skala slik at det internasjonale gjennomsnittet ble 500 «poeng» og standardavviket ble 100 «poeng». Disse tallene er ikke poeng oppnådd på selve testen, men de er likevel mål for hvor godt elevene presterte. En slik skalering ble utført for matematikk og fysikk hver for seg.

Elevene som ble testet i TIMSS Advanced 2008 hadde tre trendblokker fra 1995. Med liknende teknikker som vi nettopp har antydet kunne elevens prestasjoner på trendoppgavene i 2008 brukes til å anslå hvordan disse elevene ville ha prestert dersom de hadde tatt hele testen fra 1995. Resultatene deres kunne derfor innpasses på den skalaen som ble fastlagt i 1995.

Teknikkene som brukes for slik «brobygging» mellom undersøkelser baserer seg på *Item Response Theory* og er statistisk avanserte – atskillig mer avanserte enn beskrivelsen ovenfor kan gi inntrykk av. De blir beskrevet i den internasjonale tekniske rapporten til TIMSS Advanced (Martin et al., 2016). «Brobyggingen» ble foretatt for alle de landene som deltok i både 1995 og 2008. Slik ble altså skalaen i 2008 definert i samsvar med skalaen fra 1995. De nye deltakerlandene i 2008 ble innpasset på denne skalaen. En tilsvarende «brobygging» ble foretatt med resultatene i 2015 ved hjelp av trendoppgavene fra 2008.

Denne prosessen ga en skala (for hvert av fagene) som kan brukes som fast målestokk for prestasjoner i den første undersøkelsen i 1995, for TIMSS Advanced 2008, for TIMSS Advanced 2015 og for eventuelle nye TIMSS Advanced-studier. Dette muliggjør trendanalyser.

Den internasjonale gjennomsnittsskåren var 500 per definisjon i 1995. I 2008 var den ikke lenger 500. Det kunne heller ikke forventes. For det første må vi forvente at de landene som hadde deltatt i 1995, ikke presterte akkurat likt i 2008. Viktigere er det likevel at det ikke var samme gruppe land som deltok i begge undersøkelsene. Noen land som deltok i 1995, uteble i 2008, og nye land kom til, se tabell 14.1 på side 273. På samme måte var det en viss utskifting av deltakerland fra 2008 til 2015. Det er ingen grunn til å forvente at én gruppe land skal prestere nøyaktig like godt i gjennomsnitt som en (delvis) annen gruppe land.

Å relatere prestasjoner til det internasjonale gjennomsnittet på den enkelte studien kan gi liten mening, siden et slikt gjennomsnitt naturlig varierer fra studie til studie. Kommer det for eksempel inn et fattig land som presterer svakt – som Filippinene i 2008 – vil det kunne trekke gjennomsnittet ned i forhold til den foregående studien. Det ville være sterkt misvisende om en bedring i norske prestasjoner i forhold til det internasjonale gjennomsnittet på én studie ble framstilt som en framgang i forhold til en tidligere studie, mens det i virkeligheten skyldtes at gjennomsnittet hadde endret seg fordi nye land med svakere prestasjoner deltok. Dersom vi tenker oss at Singapore hadde deltatt i TIMSS Advanced 2008 i stedet for Filippinene, hadde utvilsomt totalbildet vært ganske annerledes. Men vurderingen av den norske utviklingen skal ikke avhenge av hvilke andre land som valgte å delta.

De prestasjonsdataene som foreligger, gir god anledning til å studere et enkelt lands utvikling over tid. Da sammenliknes landet med seg selv på den faste skalaen fra undersøkelse til undersøkelse. Sammenlikninger mellom land i samme undersøkelse er også meningsfulle. Dersom to eller flere land har deltatt i flere av undersøkelsene, kan landenes utvikling over tid også sammenliknes. Det som derimot gir liten mening, er å sammenlikne prestasjoner for et land med de internasjonale gjennomsnittene fra undersøkelse til undersøkelse, siden disse altså varierer og er avhengige av hvilke land som deltar. I de internasjonale rapportene for TIMSS og TIMSS Advanced unnlater prosjektsenteret i Boston å gjøre dette. I tabellene over deltakerlandenes gjennomsnittsskår er skalamidtpunktet på 500 oppgitt, men ikke årets internasjonale gjennomsnitt. Samme valg er gjort i denne boka.

14.3.7 Analyser og rapportering

Det internasjonale prosjektsenteret for TIMSS Advanced har ansvaret for en første grundig gjennomgang og analyse av dataene fra samtlige deltakerland. Det er de som beregner vekter for dataene i alle land, som beregner plausible verdier for alle elevene, og som foretar den internasjonale skaleringen av skårene. De utgir en teknisk rapport om gjennomføringen av studien og om hvordan dataene er behandlet (Martin et al., 2016). De utgir også en rapport om de internasjonale resultatene (Mullis, Martin, Foy et al., 2016b). Det enkelte land har ansvar for å kontrollere at landets data som brukes i disse analysene er korrekte.

Til hjelp i analysene er det utviklet en del *samlevariabler*. Eksempler på slike er *faglig selvtillit*, *indre motivasjon* og *ytre motivasjon*. En samlevariabel er en slags sammenfatning av flere variabler. Etablering av en samlevariabel er en omfattende prosess som baserer seg både på faglig innsikt og på statistiske metoder. Med bakgrunn i erfaring og tidligere forskning vil man ofte anta at flere variabler måler aspekter av samme fenomen, det vil si at man antar at de sammen danner et naturlig og interessant *konstrukt*. Denne antakelsen blir testet med *korrelasjonsundersøkelser*, *regresjonsanalyser* og *eksplorerende faktoranalyse*, og i etterkant med *konfirmerende faktoranalyse*. På denne måten søker man å etablere et solid faglig og statistisk grunnlag for bruken av samlevariablene.

For den som er interessert i statistiske resonnementer og metoder som brukes i slike store studier, finnes det mye teori man kan sette seg inn i. Eksempler er bøkene *Introduction to classical and modern test theory* (Crocker & Algina, 1986), *Statistics for social data analysis* (Knoke, Bohrnstedt & Mee, 2002) og *Structural Equations with Latent Variables* (Bollen, 1989).

Denne boka er en oppfølger til den norske rapporten fra TIMSS Advanced 2015 (Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Nye analyser av data fra TIMSS Advanced, TIMSS og PISA presenteres og drøftes i et fagdidaktisk og utdanningspolitisk perspektiv.

Appendiks

Formelliste i oppgaveheftene i matematikk

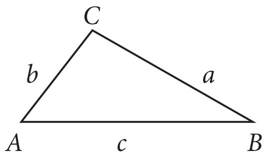
Komplekse tall

$i^2 = -1$

Hvis $z = x + iy = r(\cos A + i \sin A)$, der x og y er reelle tall, så har vi:

$z^n = [r(\cos A + i \sin A)]^n = r^n(\cos nA + i \sin nA)$

Trigonometri



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logaritmer

$\log_m ab = \log_m a + \log_m b$

$\log_m \frac{a}{b} = \log_m a - \log_m b$

$\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$

Aritmetiske følger

a_n er det n-te leddet

d er differansen

S_n er summen av de første n leddene

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

Geometriske følger

a_n er det n-te leddet

S_n er summen av de første n leddene

r er det konstante forholdet

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{hvis} \quad -1 < r < 1$

Andregradsformel

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lengde, areal og volum

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (avstand)

$A_{\text{sylinder}} = 2\pi rh$ (krum flate)

$A_{\text{kjegle}} = \pi rl = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ (krum flate)

$A_{\text{kule}} = 4\pi r^2$

$V_{\text{sylinder}} = \pi r^2 h$

$V_{\text{kjegle}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_{\text{kule}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Derivasjon og integrasjon

$(uv)' = uv' + vu'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

Hvis $f(x) = g\big(h(x)\big)$, er $f'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Referanser

Andresen, M. (2015). Glimt av kreativitet i problemløsing. *Tangenten, 2.*

Angell, C., Kjærnsli, M. & Lie, S. (1999). *Hva i all verden skjer i realfagene i videregående skole?* Oslo: Universitetsforlaget.

Astala, K., Kivelä, S. K., Koskela, P., Martio, O., Näätänen, M., Tarvainen, K. & polytechnics, m. t. i. u. a. (2005). *The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills.* Hentet fra http://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/erik/PisaEng.html

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Oslo: Universitetsforlaget.

Berthelsen, J., Illeris, K. & Poulsen, S. C. (1987). *Innføring i prosjektarbeid.* Forlaget Fag og Kultur.

Bjørkquist, O. (2001). Matematisk problemløsing. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforlaget.

Blömeke, S., Suhl, U. & Döhrmann, M. (2013). Assessing strengths and weaknesses of teacher knowledge in Asia, Eastern Europe and Western Countries: Differential item functioning in TEDS-M. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*, 795–817.

Bollen, K. A. (1989). *Structural Equations with Latent Variables.* New York: John Wiley & Sons.

Borge, I. C., Johansen, N. V. & Seland, E. H. (2016). *Studietips – til begynnerstudenter i matematikktunge realfag.* Matematisk institutt, Universitetet i Oslo.

Borge, I. C., Sanne, A., Nortvedt, G. A., Meistad, J. A., Skrindo, K., Ranestad, K. Kristensen, T. E. (2014). *Matematikk i norsk skole anno 2014. Faggjennomgang av matematikkfagene – Rapport fra ekstern arbeidsgruppe oppnevnt av Utdanningsdirektoratet.* Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Brekke, G. (1995). *KIM (Kvalitet i matematikkundervisningen): Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Clements, K., Bishop, A. J., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J. & Koon-Shing Le, F. (red.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education.* New York: Springer.

Clemet, K. (2005). https://www.utdanningsnytt.no/nyheter/2005/august/tydelige-om-laring-i-ny-lareplan/

Crocker, L. & Algina, J. (1986). *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. New York: Holt, Rinehart & Winston Inc.

D'Ambrosio, U. (1985). Mathematics Education in a Cultural setting. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 16*(4), 469–477.

De Boeck, P. (2008). Random item IRT models. *Psychometrica, 73*, 533–559.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York, NY: Scientific American Library.

Draagen, M. V. & Helvig, C. (2015). *Matematikklærebøker i Norge og Singapore: En komparativ analyse av muligheten til å lære derivasjon*. Masteroppgave, Universitetet i Oslo.

English, L. D. & Bussi, M. G. B. (2008). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Philadelphia, PA: Lawrence Erlbaum Assoc Inc.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (2000). Why Teach Mathematics? I J. White & A. Bramall (red.), *Why Learn Maths*. London: Institute of Education, London University.

Fleiss, J. L., Cohen, J. & Everitt, B. (1969). Large sample standard errors of kappa and weighted kappa. *Psychological Bulletin, 72*(5), 323–327.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S. & Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Gardiner, A. (2004). *What is Mathematical Literacy?* Presentasjon på ICME-10-konferansen, juli 2004, København, Danmark.

Grønmo, L. S. & Olsen, R. V. (2006). *TIMSS Versus PISA: The Case of Pure and Applied Mathematics*. Presentasjon på 2nd IEA International Research Conference, Washington, DC.

Grønmo, L. S. & Olsen, R. V. (2006). Matematikkprestasjoner i TIMSS og PISA: ren og anvendt matematikk. I B. Brock-Utne & L. Bøyesen (red.), *Å greie seg i utdanningssystemet i nord og sør*. Bergen: Fagbokforlaget.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2012). *Mange og store utfordringer. Et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (red.). (2013a). *Opptur og nedtur. Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige*. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (red.). (2013b). *The significance of TIMSS and TIMSS Advanced. Mathematics Education in Norway, Slovenia and Sweden*. Oslo: Akademica Publishing.

Grønmo, L. S. (2010). Prestasjoner på oppgaver i Kalkulus. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (red.), *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole* (s. 83–109). Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S. (2014). Svikter skolen de flinke elevene? I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (red.), *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* (s. 9–35). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Jahr, E., Skogen, K. & Wistedt, I. (2014). *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* Oslo: Cappelen Damm.

Grønmo, L. S., Kjærnsli, M. & Lie, S. (2004a). Looking for Cultural and Geographical Factors in Patterns of Responses to TIMSS Items. I C. Papanastasiou (red.), *Proceedings of the IRC-2004 TIMSS Conference*. Lefkosia: Cyprus University Press.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 5–23.

Hole, A., Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2017). *Measuring the Amount of Mathematical Theory needed to solve Test items in TIMSS Advanced Mathematics and Physics*. Presentasjon på 7th IEA International Research Conference, 28–30 juni 2017, Praha, Tsjekkia.

Hole, A., Onstad, T., Grønmo, L. S., Nilsen, T., Nortvedt, G. A. & Braeken, J. (2015). *Investigating mathematical theory needed to solve TIMSS and PISA mathematics test items*. Presentasjon på 6th IEA International Research Conference, 24-26 juni 2015, Cape Town, Sør-Afrika.

Humboldt. (2004). Albert Einstein Home Page. www.humboldt1.com

Idsøe, E. C. (2014). *Elever med akdemisk talent i skolen.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Idsøe, E. C. (2015). Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/stort-laringspotensial/

Jahr, E. (2014). Matematikk og de talentfulle elevene. I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (red.), *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* (s. 93–134). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Johansson, M. (2005). The mathematics textbook: from artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education, 10 (3–4)*, 43–64.

Kaiser-Messmer, G. & Blum, W. (1993). Einige Ergebnisse von vergleichenden Untersuchungen in England und Deutschland zum Lehren und Lernen von Mathematik in Realitätsbezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3/4.*

KD. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006.* Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press.

Knoke, D., Bohrnstedt, G. W. & Mee, A. P. (2002). *Statistics for Social Data Analysis*. Itasca, Ill.: F.E. Peacock Publishers.

Korvald, L. (1972). Hentet fra https://nbl.snl.no/Lars_Korvald

KUD. (1974). *Mønsterplan for grunnskolen* Hentet fra http://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2008052804017

KUD. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen*. Hentet fra http://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2007080200101

KUF. (1994). *Læreplaner for videregående opplæring.* Oslo: Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement.

KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 1997.* Oslo: Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement.

Leikin, R., Leikin, M., Paz-Baruch, N., Waisman, I. & Lev, M. (2017). On the four types of characteristics of super mathematically gifted students. *High Ability Studies, 28*(1), 107–125.

Lie, S., Angell, C. & Rohatgi, A. (2010). *Fysikk i fritt fall? TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Lie, S., Angell, C. & Rohatgi, A. (2012). Interpreting the Norwegian and Swedish trend data for physics in the TIMSS Advanced Study. *Nordic Studies in Education, 32*, 177–195.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S. & Hooper, M. (red.). (2016). *Methods and procedures in TIMSS Advanced 2015*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The Politics of Mathematics Education.* Dordrecht: Reidel.

Mullis, I. V. S. & Martin, M. O. (red.). (2013). *TIMSS 2015 Assessment Frameworks*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S. & Martin, M. O. (red.). (2014). *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2016b). *TIMSS Advanced 2015 International Results in Advanced Mathematics and Physics*. Hentet fra http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/advanced/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2016a). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Hentet fra http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Goh, S. & Cotter, K. (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. Hentet fra http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/Encyclopedia/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A. & Erberber, E. (2005). *TIMSS 2007 Assessment Frameworks*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J. & O'Connor, K. M. (2003). *TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. Doktoravhandling, Universitetet i Oslo.

Naalsund, M. (2016). Opportunities for algebraic reasoning through digital learning resources. *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 339–346.

Nadjafikhab, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 31*, 285–291.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nilsen, H. K. (2013). *Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary School to Upper Secondary School.* Doktoravhandling, Universitetet i Agder, Kristiansand.

Nilsen, T., Angell, C. & Grønmo, L. S. (2013). Mathematical competencies and the role of mathematics in physics education. A trend analysis of TIMSS Advanced 1995 and 2008. *Acta Didactica Norge, 7*(11), 1–21.

Nilsen, T., Grønmo, L. S. & Hole, A. (2013). Læringstrykk og prestasjoner i matematikk og naturfag. I L. S. Grønmo & T. Onstad (red.), *Opptur og nedtur. Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige.* Oslo: Akademika forlag.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark.* København: Undervisningsministeriet.

Niss, M. (1983). Mathematics Education for the 'Automatical Society'. I R. Schaper (red.), *Hochschuldidaktik der Mathematik. Proceeding of a conference held at Kassel 4–6 October 1983*. Leuchtturm-Verlag.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser & B. Winkelmann (red.), *The Didactics of Mathematics as a Scientific Disipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1999a). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 1–24.

Niss, M. (1999b). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse, 9*, 21–29.

Niss, M. (2003). Mål for matematikkundervisningen. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen*. Bergen: Fagbokforlaget.

Niss, M. (2007). Reflections on the State and Trends in Research on Mathematics Teaching and Learning: From Here to Utopia. I F. K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Pub Inc.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. I K. Stacey & R. Turner (red.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience*. Springer.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM, 48*(5), 611–632.

NMR. (2003). *Om bruk av bokstavkarakterer i matematikk på bachelor-nivå.* Norsk matematikkråd.

NMR. (2015). *Norsk matematikkråds forkunnskapstester*. Hentet fra http://matematikkradet.no/nmrtest.html

Nortvedt, G. A. & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli & F. Jensen (red.), *Stø kurs. Norske elevers prestasjoner i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

NOU. (2015). *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser*. NOU 2015:8.

NOU. (2016). *Mer å hente – Bedre læring for elever med stort læringspotensial.* NOU 2016:14.

OECD. (2003). *PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving. Knowledge and skills.* Paris: OECD Publications.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy.* Paris: OECD Publishing.

Olsen, R. V. & Grønmo, L. S. (2006). What are the Characteristics of the Nordic Profile in Mathematical Literacy? I J. Mejding & A. Roe (red.), *Northern Lights on PISA 2003 – A Reflection from the Nordic Countries.* Oslo: Nordisk Ministerråd.

Olsen, R. V. (2006). A Nordic Profile of Mathematics Achievement: Myth or Reality? I J. Mejding & A. Roe (red.), *Northern Lights on PISA 2003 – A Reflection from the Nordic Countrie*s. Oslo: Nordisk Ministerråd.

Onstad, T. & Grønmo, L. S. (2016). Rammeverk og metoder. I L. S. Grønmo, A. Hole & T. Onstad, *Ett skritt fram og ett tilbake* (s. 149–173). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Onstad, T. (2010a). Prestasjoner på oppgaver i geometri. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (red.), *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole* (s. 111–130). Oslo: Unipub.

Onstad, T. (2010b). Rammeverk og metoder. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (red.), *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole* (s. 235–266). Oslo: Unipub.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and prood be analyzed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23–41.

Pedersen, I. F. (2010). Prestasjoner på oppgaver i Algebra. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (red.), *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole* (s. 61–81). Oslo: Unipub.

Poulsen, S. C. (2010). *Undskyld, vi tog fejl*. Hentet fra http://politiken.dk/debat/art5597500/Undskyld-vi-tog-fejl

Sandstad, E. (2012). *"Du tenker mindre på matte'n, egentlig!" Et søkelys på norske elevers bruk av digitale hjelpemidler i matematikk*. Masteroppgave, Universitetet i Oslo.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense making in Mathematics. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2004). The Math Wars. *Educational Policy, 18*(1), 253–287.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Sjøberg, S. (2007). Internasjonale undersøkelser: Grunnlaget for Kunnskapsløftet? I H. Hølleland (red.), *På vei mot Kunnskapsløftet. Begrunnelser, løsninger og utfordringer*. Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Skogen, K. (2014a). Evnerike barn og prestasjoner. I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (red.), *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* (s. 37–58). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Skogen, K. (2014b). Kontinuerlig forbedring av skolens praksis – en entreprenøriell tilnærming. I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (red.), *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* (s. 135–160). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Smedsrud, I. & Skogen, K. (2016). *Evnerike elever og tilpasset opplæring.* Bergen: Fagbokforlaget.

SSB. (2005). *Labour market trends: The gender-divided labour market.* Hentet fra http://www.ssb.no/en/arbeid-og-lonn/artikler-og-publikasjoner/the-gender-divided-labour-market

SSB. (2016). *Kjønnslikestilling i utdanning og arbeidsmarked: Kjønnsdelt arbeidsmarked tross kvinnenes utdanningsforsprang*. Hentet fra https://www.ssb.no/befolkning/artikler-og-publikasjoner/kjonnsdelt-arbeidsmarked-tross-kvinnenes-utdanningsforsprang

Steen, L. A. (1990). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy.* Washington D.C: National Academy Press.

Tall, D. (2014). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. I M. N. Fried & T. Dreyfus (red.), *Mathematics and Mathematics Education: Searching for a Common Ground* (s. 223–235). Dordrecht: Springer.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R. & Reckase, M. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA eacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: IEA.

TIMSS 1995 Norge. (1995). Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/1995/index.html

TIMSS 2003 Norge. (2003). Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2003/

TIMSS 2007 Norge. (2007). Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2007/index.html

UHR. (2014). *Matematikkundersøkelsen*. Hentet fra http://www.uhr.no/ressurser/temasider/samarbeid_arbeidsdeling_og_konsentrasjon/matematikkundersokelsen

Wistedt, I. (2014). Matematiskt begåvade barn i svensk skola. Myter og verklighet. I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen & I. Wistedt (red.), *Matematikktalenter i skolen – hva med dem?* (s. 59–91). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Wu, M. (2009). *A critical comparison of the contents of PISA and TIMSS mathematics assessments*. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/242149776

Om forfatterne

Liv Sissel Grønmo er cand.scient og førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS), Universitetet i Oslo (UiO). Hun har ut danning i matematikk, fysikk, IKT, økonomi og skoleutvikling, hovedsakelig fra UiO og noe fra Canada og USA. Hun har vært forskningsleder ved ILS og norsk prosjektleder for internasjonale komparative studier: TIMSS 2003, 2007 og 2011 om matematikk og naturfag i grunnskolen, TIMSS Advanced 2008 og 2015 om matematikk og fysikk siste året i videregående skole, og TEDS-M 2008 om utdanning av lærere i matematikk. Grønmo har erfaring som lærer i skolen og som kommunal veileder i realfag i Lørenskog og Oslo. Hun har arbeidet med grunn- og videreutdanning av matematikklærere i Norge, og holdt vitenskapelige foredrag i land som Japan, New Zealand, USA, Singapore, Slovenia og Sverige. Grønmo var leder for den internasjonale SMIRC-komiteen med ansvar for å utarbeide oppgaver til TIMSS og TIMSS Advanced-studien i 2015. Hennes forskningsinteresser er utvikling av matematisk kompetanse med vekt på aritmetikk og algebra og på matematikk som redskap i andre fag, spesielt i fysikk.

Arne Hole er dr.scient i matematikk og førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Oslo (UiO). Han har utdanning i mate- matikk og fysikk fra UiO og er ansatt ved samme institusjon i en delt stilling mellom Institutt for lærerutdanning og skoleforskning og Matematisk institutt. Hole har arbeidet med matematikk i lærerutdanningen siden midten av 90-tallet, først ved Høgskolen i Hedmark, så ved Høgskolen i Oslo og nå ved UiO. Han har vært medlem av den norske prosjektgruppen for studien TIMSS 2011 om matematikk og naturfag i grunnskolen og TIMSS Advanced 2015 om matematikk og fysikk i videregående skole. Han har vært forfatter og medforfatter på flere bøker knyttet til matematikk i høyere utdanning, særlig rettet mot lærerutdanning. Hole ledet gruppen som utviklet de nasjonale retningslinjene for matematikk i grunnskolelærerutdanningen (GLU 1–7 og 5–10) i 2009–10. Han er nå leder av det nasjonale nettverket for matematikk i lærerutdanningen, og han er medlem i den internasjonale SMIRC-komiteen med ansvar for utvikling av oppgaver og rammeverk i matematikk for TIMSS-studiene. Hans forskningsinteresser er bl.a. bruk av matematisk teori i oppgaver innen matematikk og andre fag, samt grunnlagsspørsmål i matematikk og fysikk.

Torgeir Onstad er cand.real i matematikk og pensjonert fra stilling som førstelektor i matematikkdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo (UiO). Han har utdanning i matematikk og fysikk fra UiO og har vært ansatt på Matematisk institutt som bindeledd mellom fagmiljøet og skolen. Onstad har lang erfaring som lærer i matematikk og naturfag i Norge og Tanzania. Han har vært medlem av den norske prosjektgruppen for flere internasjonale komparative studier: TIMSS 2007 og 2011 om matematikk og naturfag i grunnskolen, TIMSS Advanced 2008 og 2015 om matematikk og fysikk i videregående skole, og TEDS-M 2008 om utdanning av lærere i matematikk. Onstad har holdt en rekke etterutdanningskurs, gjesteforelesninger og populærvitenskapelige foredrag i Palestina, Tanzania, Tsjekkia, India, Malaysia og Zambia. Onstad var medlem av den internasjonale SMIRC-komiteen med ansvar for å utarbeide oppgaver til TIMSS 2015 for grunnskolen og TIMSS Advanced 2015 for videregående skole. Han har deltatt i flere forskningsprosjekter i samarbeid med universiteter i Afrika, og har særlig interesse for matematikkens historie og etnomatematikk.

Inger Christin Borge har doktorgrad i matematikk fra University of Oxford og er nå førstelektor ved Matematisk institutt (MI), Universitetet i Oslo (UiO). Hun har tidligere vært ansatt ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO hvor hun underviste på lærerutdanningen og deltok i forskning knyttet til de internasjonale studiene TIMSS og TIMSS Advanced. Hun har også vært gjesteforsker ved ETH i Zürich, postdoktor ved MI og førsteamanuensis ved tidligere Høgskolen i Vestfold. Borge har lang erfaring i å undervise og veilede studenter og skoleelever, lærere og lærerstudenter. Spesielt har hun forelest på begynnerkurset i matematikk ved MI for forserte elever siden høsten 2012. Hun har bred erfaring som forfatter av lærebøker i matematikk på ulike nivåer: videregående skole, bachelornivå på universitet og grunnskolelærerutdanningen. Borge var også leder for Utdanningsdirektoratets ekspertgruppe bak rapporten «Matematikk i norsk skole anno 2014». Hennes faglige interesser er algebra og matematikkdidaktikk, og hun er spesielt opptatt av overgangen fra videregående skole til universitet.

Ingvill Merete Stedøy har hovedfag fra Universitetet i Oslo, og doktorgrad i matematikk fra NTNU i Trondheim, hvor hun nå er ansatt som førsteamanuensis ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hun har også tidligere vært ansatt ved NTNU, først som forskningskoordinator for Program for skoleforskning, deretter som førsteamanuensis ved Institutt for matematiske fag / Program for lærerutdanning, Stedøy var den første lederen for Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen fra 2002 til 2009.. De siste åtte årene har hun vært lektor ved Lillestrøm videregående skole hvor hun har undervist på de fleste matematikkursene. Hun har også undervisningserfaring fra ungdomstrinnet. Stedøy var medlem av alle læreplangruppene for Kunnskapsløftet. Stedøy er lærebokforfatter i matematikk for ungdomstrinnet, og har tidligere skrevet lærebøker for 3. og 4. trinn i grunnskolen og 1. og 2. trinn i videregående skole. Hennes forsknings- og utviklingsarbeider er knyttet til motivasjon / lysten til å lære, utvikling av elevaktive arbeidsformer, differensiering og formell bruk av matematisk språk.

Marie Vaksvik Draagen har mastergrad i realfagsdidaktikk fra Universitet i Oslo og er nå ansatt som lektor i realfag ved Lillestrøm videregående skole hvor hun underviser i matematikk og naturfag. I mastergradsoppgaven undersøkte hun hvilke muligheter lærebøker i Norge og Singapore gir elevene til å lære derivasjon. Hun er blant annet opptatt av progresjonsspørsmål knyttet til matematikk, praktiske og utforskende oppgaver og relasjonen mellom lærer og elev.

Siren Røst Veflingstad har hovedfag og doktorgrad i anvendt matematikk fra Norges miljø- og biovitenskapelige universitet på Ås. Hun er nå ansatt som lektor ved Lillestrøm videregående skole hvor hun underviser i både fellesfag og programfag i matematikk. I tillegg underviser hun matematikk ved studieprogrammet International Baccalaureate (IB). Hun er blant annet opptatt av at elevene skal få rom til å utforske, være muntlig aktive og utvikle god begrepsforståelse.

Tor Espen Hagen har sivilingeniørgrad fra Norges Tekniske Høgskole (NTH), Fakultet for fysikk og matematikk. Han er nå ansatt som lektor i realfag ved Lillestrøm videregående skole hvor han underviser i fysikk og matematikk. Hagen har undervisningserfaring fra ungdomstrinnet og erfaring som sensor både til skriftlig og muntlig eksamen. Han har også jobbet for bl.a. Statistisk sentralbyrå. Hagen er blant annet opptatt av variasjon i undervisningen og oppgaver hvor elevene kan utvikle forskjellige metoder og angrepsvinkler for å øke sin forståelse for matematikkfaget.